

# 1 ตรรกศาสตร์ (Logic)

- ตรรกศาสตร์ ก็คือ วิชาที่ว่าด้วยการให้เหตุผล
- เราจำเป็นต้องสร้างความชัดเจนให้กับโครงสร้างของข้อความหรือข้อโต้แย้ง โดยข้อความหรือข้อโต้แย้งหนึ่งๆจะประกอบไปด้วยประพจน์

## 1.1 ประพจน์ (Propositions)

**บทนิยาม 1.1** ประพจน์ (Propositions) คือ ข้อความที่สามารถระบุค่าความจริงได้ว่าเป็น “จริง” หรือ “เท็จ” แต่จะไม่ใช่ “จริง” และ “เท็จ” พร้อมกัน

- ประพจน์เดี่ยว (Atomic Proposition) คือ ประพจน์ซึ่งแบ่งย่อยจนไม่สามารถย่อยได้อีก
- การเชื่อมโยงประพจน์ ใช้ตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์ (Logical Connectives or Logical Operators)

**ตัวอย่างที่ 1.1** จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

- ก. 5 เป็นจำนวนเฉพาะ
- ข. ดวงจันทร์หมุนรอบดวงอาทิตย์
- ค. กรุงเบอร์ลินเป็นเมืองหลวงของประเทศเยอรมัน
- ง.  $\int \sin bxdx = -b \cos bx + C$

**ตัวอย่างที่ 1.2** ข้อความต่อไปนี้ข้อความใดเป็นประพจน์ และข้อความใดไม่เป็นประพจน์ จงให้เหตุผลประกอบ

- ก. ทานข้าวกลางวันกันไหม  คำถาม
- ข. ปิดประตูให้หน่อยสิ  คำสั่ง
- ค.  $x^2 = 4$   ยังไม่ได้แทนค่า X ระบุค่าความจริงไม่ได้
- ง.  $x - y \leq 5$
- จ. วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่สนุก  ความรู้สึก
- ฉ. เมื่อวานนี้กรุงเทพอากาศร้อนมาก  ไม่มีเกณฑ์ที่ชัดเจน
- ช. หมอเป็นคนรวย
- ซ. ถ้า  $A^2 = 0$  แล้ว  $A = 0$  สำหรับทุกๆ  $A$   มีข้อขัดแย้ง

ถ้า  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  เราพบว่า  $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$  ซึ่งไม่จริงที่ว่า  $A = 0$

ประพจน์มักจะถูกแทนด้วยตัวแปร  $p, q, r, s, \dots$  เรียกว่า **ตัวแปรประพจน์ (Propositional Variables)**

เมื่อตัวแปรเหล่านี้ถูกระบุค่าความจริง จะเรียกประพจน์นั้นว่า **ค่าคงที่ประพจน์ (Propositional Constant)**

การรวมประพจน์เดี่ยวเข้าด้วยกัน จะเกิดประพจน์ใหม่ เรียกว่า **ประพจน์ประกอบ (Compound Propositions)** ซึ่งประพจน์เดี่ยว จะถูกเชื่อมโยงด้วย **ตัวดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์ (Logical Operators หรือ Logical Connectives)**

**บทนิยาม 1.2** ประพจน์ที่ประกอบด้วยประพจน์เดี่ยว ที่ไม่สามารถย่อยได้อีก ไม่ว่าจะเป็นค่าคงที่ประพจน์หรือตัวแปรประพจน์ จะเรียกว่า **ประพจน์เดี่ยว (Atomic Proposition)** ทุกประพจน์ที่ไม่ใช่ประพจน์เดี่ยว เราจะเรียกว่า **ประพจน์ประกอบ (Compound Proposition)** ทุกประพจน์ประกอบจะบรรจุตัวดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์อย่างน้อย 1 ตัว

**ตัวอย่างที่ 1.3** ประพจน์ประกอบ เช่น “มันไม่จริง ที่ว่า 3 เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ หรือ 7 เป็นจำนวนเฉพาะ”

เขียนเป็นประพจน์ประกอบได้อย่างไร

## 1.2 ตัวดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์ (Logical Operators)

**บทนิยาม 1.3** นิเสธ (Negation)

ให้  $p$  เป็นประพจน์ ข้อความที่ว่า “ไม่เป็นจริงที่ว่า  $p$ ” เป็นประพจน์อีกประพจน์หนึ่งซึ่งต่างจาก  $p$  เรียกว่า “นิเสธของ  $p$  (Negation of  $p$ )” เขียนแทนด้วย  $\neg p$  อ่านว่า “นิเสธของ  $p$ ” หรือ “not  $p$ ”

**ตัวอย่างที่ 1.4** จงหานิเสธของประพจน์ “รถป.อ. 39 วิ่งผ่านม.เกษตรศาสตร์”

- “ไม่เป็นความจริง ที่ว่า รถป.อ. 39 วิ่งผ่านม.เกษตรศาสตร์”
- “รถป.อ. 39 ไม่ได้วิ่งผ่านม.เกษตรศาสตร์” □

**หมายเหตุ** ข้อความที่เกี่ยวข้องกับเวลา สถานที่ คำสรรพนาม ที่ไม่เจาะจงเราจะถือว่าเป็นประพจน์

ตารางค่าความจริงของนิเสธ

$p$	$\neg p$
T	F
F	T

**บทนิยาม 1.4** การเชื่อม (Conjunction)

ให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์ ประพจน์ “ $p$  และ  $q$ ” ( $p$  and  $q$ ) เขียนแทนด้วย “ $p \wedge q$ ” ประพจน์  $p \wedge q$  จะมีค่าความจริงเป็น “จริง” เมื่อทั้ง  $p$  และ  $q$  มีค่าความจริงเป็น “จริง” ทั้งคู่ และจะมีค่าความจริงเป็น “เท็จ” ในกรณีอื่นๆ เราเรียกประพจน์  $p \wedge q$  ว่า การเชื่อมของ  $p$  และ  $q$  (Conjunction of  $p$  and  $q$ )

**บทนิยาม 1.5** การเลือก (Disjunction)

ให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์ ประพจน์ “ $p$  หรือ  $q$ ” ( $p$  or  $q$ ) เขียนแทนด้วย “ $p \vee q$ ” ประพจน์  $p \vee q$  จะมีค่าความจริงเป็น “เท็จ” เมื่อทั้ง  $p$  และ  $q$  มีค่าความจริงเป็น “เท็จ” ทั้งคู่ และจะมีค่าความจริงเป็น “จริง” ในกรณีอื่นๆ เราเรียกประพจน์  $p \vee q$  ว่า การเลือกของ  $p$  และ  $q$  (Disjunction of  $p$  and  $q$ )

ตารางค่าความจริงของการเชื่อม

$p$	$q$	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตารางค่าความจริงของการเลือก

$p$	$q$	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

**ตัวอย่างที่ 1.5** จงแปลงประพจน์ต่อไปนี้ให้เป็นประพจน์ประกอบโดยใช้ตัวแปรประพจน์

- ก. โจ๊กบ๊วยเป็นนักกีฬาเบดมินตัน
- ข. ทิพเพิ่งอาบน้ำหรือเธอใส่เสื้อผ้าหอม
- ค. ต้นไม้ได้ลงทะเบียนเรียนวิชาแคลคูลัสแต่เขาลงทะเบียนเรียนวิชาปรัชญา

สำหรับข้อ ก.

ให้  $p$  แทน โจ๊กเป็นนักกีฬาเบดมินตัน

$q$  แทน เบนเป็นนักกีฬาเบดมินตัน

จะได้ว่า  $p \wedge q$  แทน “โจ๊กเป็นนักกีฬาเบดมินตันและเบนก็เป็นนักกีฬาเบดมินตัน”

เป็นจริงเมื่อใด

สำหรับข้อ ข.

ให้  $p$  แทน ทิพเพิ่งอาบน้ำ

$q$  แทน ทิพใส่เสื้อผ้าหอม

จะได้ว่า  $p \vee q$  แทน “ทิพเพิ่งอาบน้ำหรือเธอใส่เสื้อผ้าหอม”

เป็นจริงเมื่อใด

สำหรับข้อ ค.

ให้  $p$  แทน ต้นลงทะเบียนเรียนวิชาแคลคูลัส

$q$  แทน ต้นลงทะเบียนเรียนวิชาปรัชญา

จะได้ว่า  $\neg p \wedge q$  แทน “ต้นไม่ได้ลงทะเบียนเรียนวิชาแคลคูลัสแต่เขาลงทะเบียนเรียนวิชาปรัชญา” □

### Inclusive-Or หรือ Exclusive-Or

ในเมนูอาหารชุดเราอาจพบคำว่า “หรือ” ซึ่งมีความหมาย ในการเลือกอย่างใดอย่างหนึ่ง

เช่น แกงเขียวหวานลูกชิ้นปลากราย หรือ สเปาเกี๊ยวหอยลายราดครีมซอส

คาปูชิโนกับคุกกี้ หรือ ชานมเย็นกับโดนัท

รถสตาร์ทไม่ติดเพราะหัวเทียนบอดหรือไดสตาร์ทเสีย

Ex-OR หรือ In-OR

สำหรับตัวดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์การเลือก ( $\vee$ ) จะพิจารณาในแบบ Inclusive-Or เท่านั้น

**หมายเหตุ** ประโยคที่สมบูรณ์จะต้องประกอบด้วยประธาน (Subject) และส่วนขยาย (Predicate) แต่ประโยคในภาษาที่เราใช้กันทั่วไปมักจะถูกใช้ในรูปแบบสั้น ดังนั้น การพิจารณาประโยคเหล่านี้ในเชิงตรรกศาสตร์ จึงจำเป็นต้องปรับแต่งประโยคให้สมบูรณ์ กล่าวคือ ประโยคจะต้องประกอบประธานและส่วนขยาย ซึ่งถูกเชื่อมด้วยตัวดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์ หรือในรูป  $\{Subj + Pred.\} + \{logical\ Operator\} + \{Subj + Pred.\}$  เช่น “โปรแกรมที่เธอเขียนมีข้อผิดพลาดที่บรรทัด 28 หรือ 31” เมื่อแปลงให้เป็นข้อความที่สมบูรณ์ จะได้ “โปรแกรมที่เธอเขียนมีข้อผิดพลาดที่บรรทัด 28”  $\vee$  “โปรแกรมที่เธอเขียนมีข้อผิดพลาดที่บรรทัด 31”

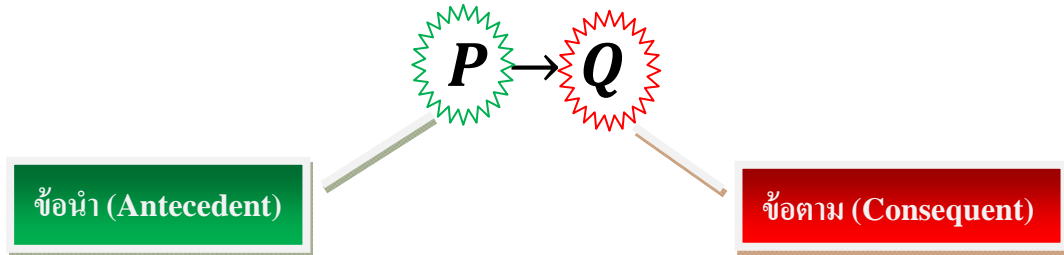
### บทนิยาม 1.6 เงื่อนไขทางเดียว (Conditional)

ให้  $p$  และ  $q$  เป็นประพจน์ ประพจน์เงื่อนไขทางเดียว “ $p \rightarrow q$ ” (if  $p$  then  $q$ ) เขียนแทนด้วย  $p \rightarrow q$  จะมีค่าความจริงเป็น “เท็จ” เมื่อทั้ง  $p$  มีค่าความจริงเป็น “จริง” และ  $q$  มีค่าความจริงเป็น “เท็จ” และจะมีค่าความจริงเป็น “จริง” ในกรณีอื่นๆ ประพจน์เงื่อนไข  $p \rightarrow q$  อ่านว่า ถ้า  $p$  แล้ว  $q$  (if  $p$  then  $q$ ) มีความหมายว่า เมื่อใดก็ตามที่  $p$  เป็นจริง  $q$  ก็จะจริงด้วย จะเรียก  $p$  ว่า “ข้อนำ” (Antecedent) และ  $q$  ว่า “ข้อตาม” (Consequent)

ตารางค่าความจริงของ  $p \rightarrow q$

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ประพจน์ประกอบ  $p \rightarrow q$  อาจแยกพิจารณาได้ 2 ส่วน



ข้อนำที่มีค่าความจริงเป็น “จริง” ตรรกศาสตร์เงื่อนไขจะมีค่าความจริงเช่นเดียวกับข้อตาม สำหรับข้อนำที่มีค่าความจริงเป็น “เท็จ” ตรรกศาสตร์เงื่อนไขจะมีค่าความจริงเป็น “จริง” เสมอ ไม่ว่าข้อตามจะมีค่าความจริงเป็นอย่างไร เราเรียกว่า ค่าความจริงสำคัญน้อย (Trivially True)

ความขัดแย้งกับความรูสึกทางภาษา

ถ้าฉันสอบวิชานี้ได้เกรดเอ แล้วอากาศเมติสจะพบวิหาปริมาตรของวัตถุ

การใช้ตรรกศาสตร์เงื่อนไขทางเดียว (Logical Condition) ในชีวิตประจำวันนั้นเรามักจะสนใจในกรณีที่ผลของประพจน์ประกอบ  $p \rightarrow q$  มีค่าความจริงเป็นจริง

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
T	T	T
F	T	T
F	F	T

ตัวอย่างเช่น

“ผู้ที่ขับรถยนต์ จะต้องคาดเข็มขัดนิรภัย”

“ถ้า X เป็นคนขับรถยนต์ แล้ว X จะต้องคาดเข็มขัดนิรภัย”

$p \rightarrow q$

- $p$  เป็นเท็จ กล่าวคือ “X ไม่เป็นคนขับรถยนต์” เขาอาจจะคาดเข็มขัดนิรภัยก็ได้
- ถ้า X ไม่ได้เป็นคนขับรถยนต์และเขาก็ไม่ได้คาดเข็มขัด

ข้อสังเกต ความขัดแย้งของประพจน์ประกอบ  $p \rightarrow q$  ไม่เกิดขึ้น ด้วยเหตุผลที่ว่า ประพจน์ดังกล่าวเป็นข้อตกลง เป็นสัญญา หรือข้อบังคับ

จากตารางจะพบว่า  $p$  จะเป็นจริง เฉพาะเมื่อ  $q$  เป็นจริง หรือสังเกตได้ว่า  $p$  (ข้อนำ) มีค่าความจริงเป็น “จริง” น้อยกว่า  $q$  (ข้อตาม) กรณีนี้จะกล่าวว่า  $p$  เป็นเงื่อนไขที่แข็งแกร่งกว่า  $q$  และกล่าวว่า  $q$  เป็นเงื่อนไขที่อ่อนกว่า  $p$  หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ ถ้าผลสืบเนื่อง (ข้อตาม)  $q$  เป็น “เท็จ” แล้ว เหตุหรือเงื่อนไข (ข้อนำ)  $p$  ก็จะเป็นเท็จด้วย

$p \rightarrow q$  สามารถตีความได้เป็น “ $p$  จะเกิดเฉพาะเมื่อ  $q$ ” หรือในภาษาอังกฤษ “ $p$  only if  $q$ ”

### “เขาเป็นคนที่ขบถยนต์ได้เฉพาะเมื่อเขาคาดเข็มขัดนิรภัย”

ถ้าเขาไม่คาดเข็มขัดนิรภัย แล้วการขบรถยนต์ของเขาก็จะไม่ถูกต้องตามข้อบังคับหรือกฎหมาย การคาดเข็มขัดนิรภัยของผู้ขบรถยนต์ ถือเป็นเงื่อนไขจำเป็น (necessary condition)

การเป็นผู้ขบรถยนต์ เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition) ที่จะบังคับว่า เขาจะต้องคาดเข็มขัดนิรภัย

แต่อย่างไรก็ตาม ผู้โดยสารคนอื่นๆจะคาดเข็มขัดนิรภัยก็ได้ ถือว่าไม่ผิดอะไร

ค่าความจริงที่เป็น “จริง” ของ  $p \rightarrow q$  ในบางครั้งถูกอธิบายในลักษณะที่ว่า  $p$  เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้เกิดเหตุการณ์  $q$  ( $p$  is a sufficient condition for  $q$ ) หรือ  $q$  เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ  $p$  ( $q$  is a necessary condition for  $p$ ) การกล่าวว่า  $p$  เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอ (necessary and sufficient) สำหรับ  $q$  ก็คือการกล่าวอีกแบบหนึ่งของ “ $p \leftrightarrow q$  เป็นจริง”

จากประพจน์ประกอบ  $p \rightarrow q$  เราเรียก  $q \rightarrow p$  ว่า บทกลับของ  $p \rightarrow q$  (converse of  $p \rightarrow q$ ) และเรียก  $\neg q \rightarrow \neg p$  ว่า ประพจน์แย้งสลับที่ของ  $p \rightarrow q$  (contrapositive of  $p \rightarrow q$ )

ตัวอย่างที่ 1.6 จงอธิบายความแตกต่างของสองประพจน์ต่อไปนี้

- ก. รถยนต์หยุดเมื่อไฟจราจรเป็นสีแดง
- ข. รถยนต์หยุดเฉพาะเมื่อไฟจราจรเป็นสีแดง

ประพจน์ ก. รถยนต์อาจจะหยุดด้วยเหตุผลอื่นๆ ได้

ประพจน์ ข. รถยนต์จะหยุดเพียงกรณีเดียวคือ ไฟจราจรเป็นสีแดง

□

**บทนิยาม 1.7** เงื่อนไขสองทาง (Biconditional)

ให้  $p$  และ  $q$  เป็นสองประพจน์ใดๆ ประพจน์ประกอบ  $p \leftrightarrow q$  จะมีค่าความจริงเป็น “จริง” เมื่อใดก็ตามที่  $p$  และ  $q$  มีค่าความจริงเหมือนกัน ประพจน์ประกอบ  $p \leftrightarrow q$  เรียกว่าเงื่อนไขสองทาง หรือ สมมูล (Biconditional or Equivalence) และอ่านว่า “ $p$  ก็ต่อเมื่อ  $q$  ( $p$  if and only if  $q$ )” เวลาเขียนเราจะใช้ “iff” แทนคำว่า “if and only if”

ตารางค่าความจริงของ  $p \leftrightarrow q$

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

**ตัวอย่างที่ 1.7** ให้  $p$  แทน “ $X$  เป็นเลขคู่”

$q$  แทน “ $X$  หารด้วย 2 ลงตัว”

ประพจน์ประกอบ  $p \leftrightarrow q$  แทนข้อความที่ว่า “ $X$  เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ  $X$  หารด้วย 2 ลงตัว” □

## ตัวดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์ระดับบิต (Bit Operators)

สถานะของบิต (bit = binary digit) ซึ่งมี 2 สถานะคือ เปิด (แทนด้วย 1) เทียบได้กับค่าความจริงที่เป็น “จริง” และปิด (แทนด้วย 0) เทียบได้กับค่าความจริงที่เป็น “เท็จ”

การดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์ด้วย AND, OR และ XOR บนบิต

$x$	$y$	$x$ OR $y$	$x$ AND $y$	$x$ XOR $y$
1	1	1	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
0	0	0	0	0

**บทนิยาม 1.8** สายของบิต (Bit String) คือ ลำดับของบิตตั้งแต่ศูนย์หรือมากกว่า ความยาวของสายบิต คือ จำนวนบิตในสาย

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหา Bitwise OR, Bitwise AND และ Bitwise XOR ของสายบิต

01 0111 0110 และ 11 0001 1101

01 1011 0110

11 0001 1101

Bitwise OR      11 1011 1111

Bitwise AND    01 0001 0100

Bitwise XOR    10 1010 1011

□



## 1.3 ประพจน์ประกอบ (Compound Proposition)

การไม่แยกแยะลำดับในการดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์ให้ชัดเจน ก็อาจจะก่อให้เกิดความกำกวมได้ ตัวอย่างเช่น

$$\begin{array}{ccc}
 & p \rightarrow q \wedge r & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 (p \rightarrow q) \wedge r & \text{????} & p \rightarrow (q \wedge r)
 \end{array}$$

เราต้องกำหนดลำดับความสำคัญของการดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์

ประพจน์ประกอบที่มีความซับซ้อนมากเราจะต้องใช้วงเล็บมาช่วยบังคับลำดับในการดำเนินการ

**ตาราง 1.1** ลำดับความสำคัญของการดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์ (Precedence Rule)

ลำดับความสำคัญ	ตัวดำเนินการเชิงตรรกศาสตร์
1	$\neg$
2	$\wedge$
3	$\vee$
4	$\rightarrow$
5	$\leftrightarrow$

ประพจน์ประกอบเราอาจจะเรียกว่า **นิพจน์ตรรกศาสตร์ (Logical Expression)**

$$\text{???} \quad \sim p \wedge q \rightarrow r \vee s \wedge r$$

**บทนิยาม 1.9** ตัวดำเนินการทวิภาค (Binary Operator) จะถูกเรียกว่า ตัวดำเนินการทางซ้าย (Left Associative) ถ้าตัวดำเนินการทางซ้ายต้องถูกทำก่อน และจะถูกเรียกว่า ตัวดำเนินการทางขวา (Right Associative) ถ้าตัวดำเนินการทางขวาถูกทำก่อน

$p \rightarrow q \rightarrow r$  จะเขียนใหม่ได้เป็น  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$  เนื่องจากตัวดำเนินการ “ $\rightarrow$ ” เป็นตัวดำเนินการทางซ้าย

**บทนิยาม 1.10** ให้  $\circ$  เป็นตัวดำเนินการหลักของนิพจน์ตรรกศาสตร์ (ประพจน์ประกอบ) จะเรียก  $\circ$  ว่าเป็น **สัญกรณ์เติมหน้า (Prefix Notation)** ถ้า  $\circ$  ถูกวางไว้หน้าตัวถูกดำเนินการ จะเรียกว่าเป็น **สัญกรณ์แทรก** ถ้าตำแหน่งของสัญกรณ์ถูกวางไว้ระหว่างตัวถูกดำเนินการ และจะเรียกว่าเป็น **สัญกรณ์ต่อท้าย (Postfix)** จะวางอยู่ในตำแหน่งท้ายของตัวถูกดำเนินการ

**ตัวอย่างที่ 1.9** จงแปลงข้อความต่อไปนี้ให้เป็นประพจน์ประกอบ

- ก. คุณสามารถเบิกค่าน้ำมันจากบริษัทได้ เฉพาะเมื่อ คุณเป็นพนักงานชาย หรือทำงานกับบริษัทมาไม่น้อยกว่า 3 ปี
- ข. คุณจะต้องจ่ายค่าตัวเข้าชมพิพิธภัณฑ์ ถ้าคุณสูงไม่ถึง 140 ซม. และอายุไม่เกิน 12 ปี

สำหรับข้อ ก. เราให้

$p$  แทน  $X$  สามารถเบิกค่าน้ำมันได้

$q$  แทน  $X$  เป็นพนักงานชาย

$r$  แทน  $X$  ทำงานกับบริษัทมาไม่เกิน 3 ปี

จะได้ประพจน์ประกอบเป็น  $p \rightarrow (q \vee \neg r)$

สำหรับข้อ ข. เราให้

$p$  แทน  $X$  ต้องจ่ายค่าตัวเข้าชมพิพิธภัณฑ์

$q$  แทน  $X$  สูงไม่เกิน 140 ซม.

$r$  แทน  $X$  อายุมากกว่า 12 ปี

จะได้ประพจน์ประกอบเป็น  $(q \wedge \neg r) \rightarrow \neg p$  □

## การคำนวณค่าความจริงของประพจน์ประกอบและตารางค่าความจริง (Truth Table)

พิจารณาค่าความจริงของแต่ละส่วนประกอบย่อย หรือ นิพจน์ย่อย (Parsed) ซึ่งเราจะใช้ค่าความจริงของส่วนประกอบย่อยนี้ไปคำนวณค่าประพจน์ประกอบหลัก โดยใช้แผนผังต้นไม้ของส่วนประกอบย่อย (Parse Tree)

“ถ้า คุณเรียนวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย และไม่เข้าใจตรรกศาสตร์ แล้ว คุณจะสอบไม่ผ่าน”

เราจะเริ่มจากการกำหนดตัวแปรประพจน์แทนประพจน์เดียว โดย

$p$  แทน คุณเรียนวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย

$q$  แทน คุณเข้าใจตรรกศาสตร์

$r$  แทน คุณสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย

เขียนได้เป็น  $(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$

มีประพจน์เดียว 3 ประพจน์ มีรูปแบบของสถานการณ์ที่แตกต่างกันได้ทั้งสิ้น  $2^3 = 8$  รูปแบบ

ถ้าประพจน์ประกอบ บรรจุประพจน์เดียว  $n$  ประพจน์ ก็จะมีรูปแบบของสถานการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งสิ้น  $2^n$  รูปแบบ

$p$	$q$	$r$	$\neg q$	$(p \wedge \neg q)$	$\neg r$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$
T	T	T	F	F	F	T
T	T	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	F
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T	T

เราสังเกตว่า ข้อความข้างต้น จะเป็นเท็จในกรณีเดียว คือ “ถ้าคุณเรียนวิชาคณิตศาสตร์เต็มหน่วย และไม่เข้าใจตรรกศาสตร์แล้วคุณสอบผ่าน”

## 1.4 ลัจนิรันดร์และข้อขัดแย้ง (Tautologies and Contradictions)

**บทนิยาม 1.11** นิพจน์ตรรกศาสตร์จะเป็น “ลัจนิรันดร์ (Tautology)” ถ้าทุกค่าความจริงของประพจน์เดียวในนิพจน์ตรรกศาสตร์นั้น ให้ค่าความจริงของนิพจน์หลักเป็น “จริง” ทั้งหมด

**บทนิยาม 1.12** นิพจน์ตรรกศาสตร์จะเป็น “ข้อขัดแย้ง (Contradiction)” ถ้าทุกค่าความจริงของประพจน์เดียวในนิพจน์ตรรกศาสตร์นั้น ให้ค่าความจริงของนิพจน์หลักเป็น “เท็จ” ทั้งหมด

**บทนิยาม 1.13** นิพจน์ตรรกศาสตร์ที่ไม่เป็นทั้ง “ลัจนิรันดร์” และ “ข้อขัดแย้ง” จะเรียกว่า “เหตุนิพจน์ (Contingent)”

ตัวอย่างที่ 1.10 จงหาค่าความจริงของ  $\neg(p \wedge q) \vee q$

พิจารณตารางค่าความจริง

$p$	$q$	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q) \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

อาจจะใช้สัญลักษณ์  $\models$  วางไว้ข้างหน้านิพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ เพื่อแสดงว่าประพจน์ประกอบ หรือนิพจน์ตรรกศาสตร์นั้นมีค่าความจริงเป็น “จริง” เสมอ

เช่น  $\models \neg(p \wedge q) \vee q, \quad \models p \vee \neg p$

### ข้อขัดแย้ง (Contradiction)

ถ้า  $A$  เป็นสัจนิรันดร์แล้ว  $\neg A$  ก็จะเป็นข้อขัดแย้ง

ข้อขัดแย้งสามารถใช้ในการพิสูจน์ความสอดคล้องกันของเหตุและผล

ในขณะที่ข้อสมมุติฐานเป็นจริงทั้งหมด การเชื่อมข้อสมมุติฐานที่เป็นจริงกับการปฏิเสธข้อสรุป (ทั้งที่ข้อสรุปเป็นจริง) ย่อมทำให้ผลมีค่าความจริงเป็น “เท็จ” เสมอ (Contradiction) และทางเดียวที่จะทำให้ผลเป็นจริงก็คือการยอมรับข้อสรุป

พิจารณานิพจน์ต่อไปนี้  $\models ((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

ข้อสมมุติฐานคือ  $(p \vee q)$  และ  $\neg p$

ข้อสรุปคือ  $q$

การพิสูจน์โดยข้อขัดแย้ง จะแทนข้อสรุป  $q$  ด้วย  $\neg q$  ซึ่งเป็นการปฏิเสธข้อสรุป และเรายอมรับข้อสมมุติฐาน

เชื่อมข้อสรุปที่ถูกปฏิเสธเข้ากับข้อสมมุติฐาน ได้เป็น  $(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$  และเราสร้างตารางค่าความจริงได้เป็น

$p$	$q$	$(p \vee q)$	$\neg p$	$(p \vee q) \wedge \neg p$	$\neg q$	$(p \vee q) \wedge \neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F