



ลำดับ (Sequence)

บทนิยาม ลำดับ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ที่เรียงจากน้อยไปมาก โดยเริ่มตั้งแต่ 1

ลำดับจำกัด เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัวแรก คือ มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ ดังนั้นลำดับจำกัด คือ $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$

ลำดับอนันต์ เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก คือ มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ดังนั้นลำดับอนันต์ คือ $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$

จากบทนิยามจะได้ $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n)$ เป็นลำดับจำกัด
 $f(1), f(2), f(3), \dots, f(n), \dots$ เป็นลำดับอนันต์

$f(1)$ คือ พจน์แรกของลำดับ เขียนแทนด้วย a_1

$f(2)$ คือ พจน์ที่ 2 ของลำดับ เขียนแทนด้วย a_2

$f(3)$ คือ พจน์ที่ 3 ของลำดับ เขียนแทนด้วย a_3

\vdots

$f(n)$ คือ พจน์ที่ n ของลำดับ เขียนแทนด้วย a_n

นั่นคือ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับจำกัด

และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับอนันต์

จากตัวอย่างที่กล่าวมา

(1) $10, 20, 30, 40, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ที่มี $a_1 = 10, a_2 = 20, a_3 = 30, a_4 = 40$
และ $a_n = 10n$

(2) $1, 3, 5, 7, K$ เป็นลำดับอนันต์ที่มี $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9$
และ $a_n = 2n - 1$

(3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ เป็นลำดับจำกัดที่มี $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}$
และ $a_n = \frac{1}{n}$

(4) $2, 4, 8, 16, \dots$ เป็นลำดับอนันต์ที่มี $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$
และ $a_n = 2^n$





😊 รูปแบบการกำหนดลำดับ

ตัวอย่างที่ 1 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = 5n - 2$

วิธีทำ จาก $a_n = 5n - 2$

$$a_1 = 5(1) - 2 = 3$$

$$a_2 = 5(2) - 2 = 8$$

$$a_3 = 5(3) - 2 = 13$$

$$a_4 = 5(4) - 2 = 18$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 3, 8, 13, 18

ตัวอย่างที่ 2 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับ $a_n = 2n + 5$

วิธีทำ จาก $a_n = 2n + 5$

$$a_1 = 2(1) + 5 = 7$$

$$a_2 = 2(2) + 5 = 9$$

$$a_3 = 2(3) + 5 = 11$$

$$a_4 = 2(4) + 5 = 13$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ 7, 9, 11, 13

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเมื่อกำหนดพจน์ทั่วไป คือ

$$(1) a_n = (-2)^n \qquad (2) a_n = 4 + (-1)^n$$

$$(3) a_n = \frac{2n}{1+n} \qquad (4) a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

วิธีทำ (1) จาก $a_n = (-2)^n$

$$a_1 = (-2)^1 = -2$$

$$a_2 = (-2)^2 = (-2)(-2) = 4$$

$$a_3 = (-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$$

$$a_4 = (-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$$

ดังนั้น สี่พจน์แรกของลำดับนี้ คือ -2, 4, -8, 16





(2) จาก $a_n = 4 + (-1)^n$

$$a_1 = 4 + (-1)^1 = 4 + (-1) = 3$$

$$a_2 = 4 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5$$

$$a_3 = 4 + (-1)^3 = 4 + (-1) = 3$$

$$a_4 = 4 + (-1)^4 = 4 + 1 = 5$$

ดังนั้น ลำดับแรกของลำดับนี้ คือ 3, 5, 3, 5

(3) จาก $a_n = \frac{2n}{1+n}$

$$a_1 = \frac{2(1)}{1+1} = 2$$

$$a_2 = \frac{2(2)}{1+2} = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = \frac{2(3)}{1+3} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{2(4)}{1+4} = \frac{8}{5}$$

ดังนั้น ลำดับแรกของลำดับนี้ คือ $2, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}$

(4) จาก $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$

$$a_1 = \frac{(-1)^1}{2(1)-1} = \frac{(-1)}{1} = -1$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2(2)-1} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{(-1)^3}{2(3)-1} = \frac{(-1)}{6-1} = -\frac{1}{5}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{2(4)-1} = \frac{1}{8-1} = \frac{1}{7}$$

ดังนั้น ลำดับแรกของลำดับนี้ คือ $-1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}$

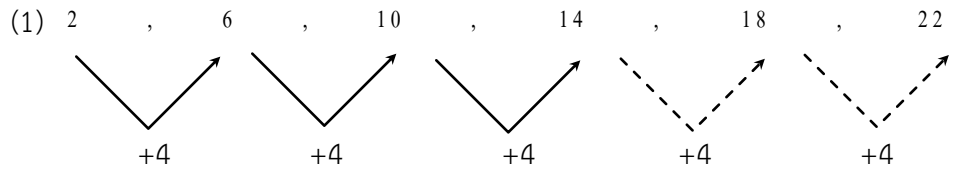




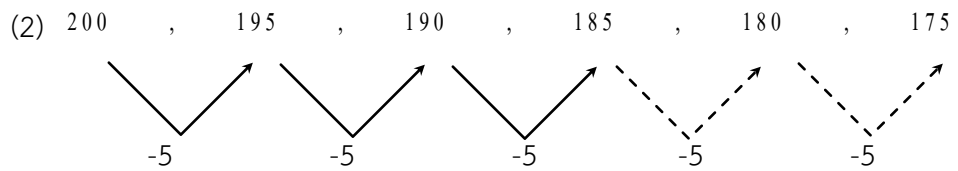
ตัวอย่างที่ 4 จงหาพจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- (1) 2, 6, 10, 14, ... (2) 200, 195, 190, 185, ...
 (3) 1, 4, 16, 64, ... (4) 729, 243, 81, 27, ...
 (5) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \dots$

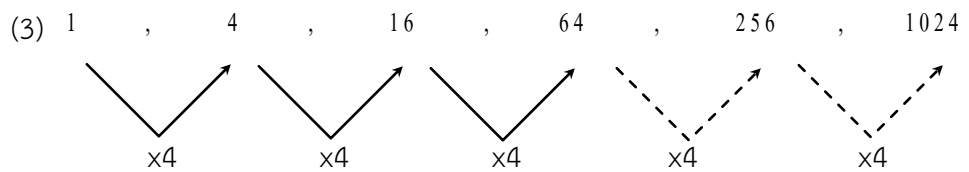
วิธีทำ



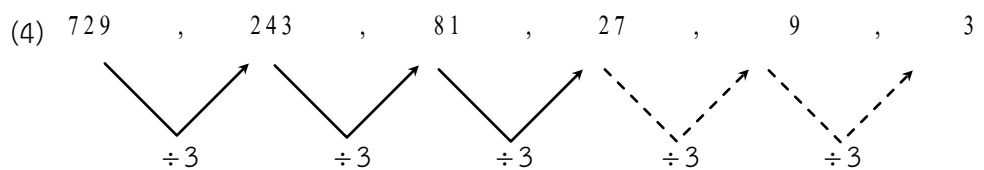
ดังนั้น พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับนี้ คือ 18 และ 23 ตามลำดับ



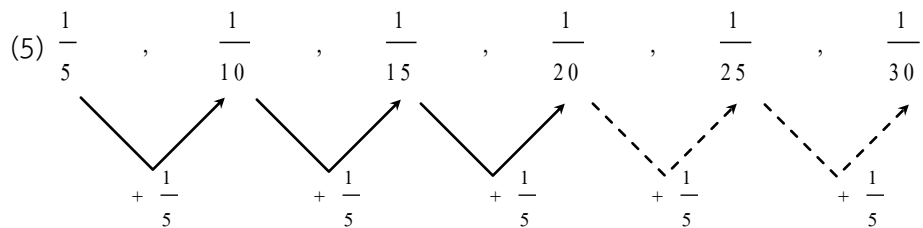
ดังนั้น พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับนี้ คือ 180 และ 175 ตามลำดับ



ดังนั้น พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับนี้ คือ 256 และ 1024 ตามลำดับ



ดังนั้น พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับนี้ คือ 9 และ 3 ตามลำดับ



ดังนั้น พจน์ถัดไปสองพจน์ของลำดับนี้ คือ $\frac{1}{25}$ และ $\frac{1}{30}$ ตามลำดับ





☺ การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ

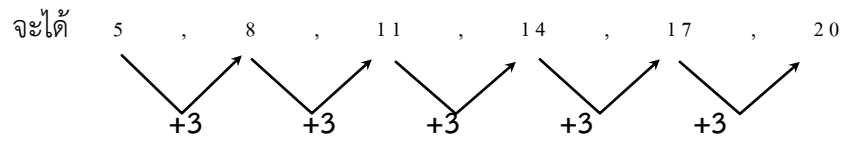
การหาพจน์ทั่วไปของลำดับ คือ การเขียนพจน์ทั่วไปแสดงเป็น a_n ในรูปที่มี n เป็นตัวแปร เมื่อแทน n ด้วยสมาชิกในเซต $\{1, 2, 3, \dots, m\}$ แล้วได้พจน์ $1, 2, 3, \dots, m$ ของลำดับตรงตามที่กำหนด

ตัวอย่างที่ 5 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดต่อไปนี้

(1) 5, 8, 11, 14, 17, 20 (2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ (3) 1, 3, 9, 27

วิธีทำ

(1) จาก 5, 8, 11, 14, 17, 20



พิจารณาพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

$$a_1 = 5 = 3(1) + 2$$

$$a_2 = 8 = 3(2) + 2$$

$$a_3 = 11 = 3(3) + 2$$

$$a_4 = 14 = 3(4) + 2$$

$$a_5 = 17 = 3(5) + 2$$

$$a_6 = 20 = 3(6) + 2$$

จะได้ $a_n = 3n + 2$ เมื่อ $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) จาก $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$

พิจารณาพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

$$a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

$$a_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1}$$

$$a_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1}$$

$$a_4 = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1}$$

$$a_5 = \frac{5}{6} = \frac{5}{5+1}$$

จะได้ $a_n = \frac{n}{n+1}$ เมื่อ $n = \{1, 2, 3, 4, 5\}$





(3) จาก 1, 3, 9, 27

พิจารณาพจน์ที่กำหนดให้ดังนี้

$$a_1 = 1 = 3^0 = 3^{1-1}$$

$$a_2 = 3 = 3^1 = 3^{2-1}$$

$$a_3 = 9 = 3^2 = 3^{3-1}$$

$$a_4 = 27 = 3^3 = 3^{4-1}$$

$$\text{จะได้ } a_n = 3^{n-1} \text{ เมื่อ } n = \{1, 2, 3, 4\}$$

ข้อสังเกต 1. การหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดจำนวนพจน์น้อยเกินไป อาจทำให้เราหาพจน์ทั่วไปได้ต่างกัน เนื่องจากลำดับที่ต่างกันอาจจะมีพจน์แรกๆ เหมือนกัน

2. เมื่อหาพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้ได้แล้ว ควรจะแทน n ใน a_n ด้วยสมาชิก 1, 2, 3, ... เพื่อตรวจสอบว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดมาให้จริงหรือไม่ โดยดูว่าพจน์ที่ได้จากการแทนค่าดังกล่าวเป็นไปตามที่กำหนดให้หรือไม่

3. การกำหนดลำดับอนันต์จะเขียนพจน์ทั่วไปกำกับไว้กับการเขียนลำดับเสมอเพื่อสื่อสารให้ทราบว่าจะกล่าวถึงลำดับใด เช่น $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots$ ยกเว้นในกรณีที่ระบุได้ว่าลำดับอนันต์นั้นมีความสัมพันธ์ที่เห็นชัดเจนว่าจะหาพจน์ถัดจากพจน์แรกๆ ได้อย่างไร เช่น 1, 2, 3, 4, ...

ตัวอย่างที่ 6 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับอนันต์ต่อไปนี้

(1) 7, 12, 17, 22, 27, ...

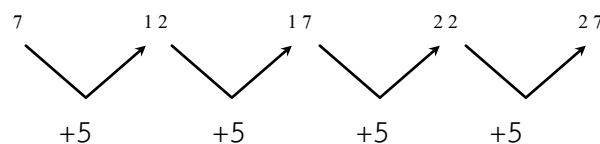
(2) 4, 8, 12, 16, 20, ...

(3) 1, - 1, - 3, - 5, - 7, ...

(4) 3, 0, - 3, - 6, - 9, ...

วิธีทำ

(1) พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 7, 12, 17, 22, 27, ...



พบว่า พจน์แต่ละพจน์จะมากกว่าพจน์ที่มาอยู่ก่อนอยู่ 5

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้



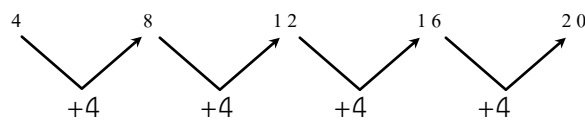


▶ เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง “ลำดับและอนุกรม” วิชาคณิตศาสตร์ ชั้น ม.5

พจน์ที่ (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
7	12	17	22	27
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$5 + 2$	$10 + 2$	$15 + 2$	$20 + 2$	$25 + 2$
หรือ $5(1) + 2$	$5(2) + 2$	$5(3) + 2$	$5(4) + 2$	$5(5) + 2$

จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = 5(n) + 2$

(2) พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 4, 8, 12, 16, 20, ...

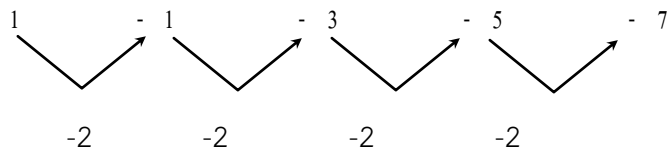


พบว่า พจน์แต่ละพจน์จะมากกว่าพจน์ที่มาอยู่ก่อนอยู่ 4
 พิจารณาหาความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้

พจน์ที่ (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
4	8	12	16	20
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4×1	4×2	4×3	4×4	4×5

จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = 4n$

(3) พิจารณาความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 1, - 1, - 3, - 5, - 7, ...



พบว่า พจน์แต่ละพจน์จะน้อยกว่าพจน์ที่มาอยู่ก่อนอยู่ 2





▶ เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง “ลำดับและอนุกรม” วิชาคณิตศาสตร์ ชั้น ม.5

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้

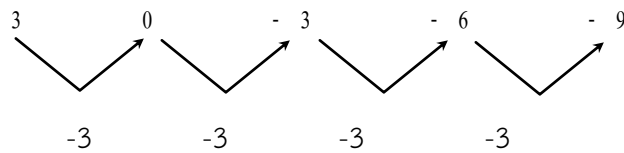
พจน์ที่ (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	- 1	- 3	- 5	- 7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$(- 2) + 3 \quad (- 4) + 3 \quad (- 6) + 3 \quad (- 8) + 3 \quad (- 10) + 3$$

หรือ $(- 2)(1) + 3 \quad (- 2)(2) + 3 \quad (- 2)(3) + 3 \quad (- 2)(4) + 3 \quad (- 2)(5) + 3$

จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = (- 2)(n) + 3$

(4) พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของพจน์ในลำดับ 3, 0, - 3, - 6, - 9, ...



พบว่า พจน์แต่ละพจน์จะน้อยกว่าพจน์ที่มาอยู่ก่อนอยู่ 3

พิจารณาค่าความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ที่กำหนดให้

พจน์ที่ (1)	(2)	(3)	(4)	(5)
3	0	- 3	- 6	- 9
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$$(- 3) + 6 \quad (- 6) + 6 \quad (- 9) + 6 \quad (- 12) + 6 \quad (- 15) + 6$$

หรือ $(- 3)(1) + 6 \quad (- 3)(2) + 6 \quad (- 3)(3) + 6 \quad (- 3)(4) + 6 \quad (- 3)(5) + 6$

จะได้พจน์ทั่วไป หรือ $a_n = (- 3)(n) + 6$





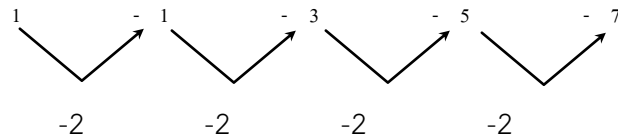
การหาพจน์ทั่วไปของลำดับในตัวอย่างข้างต้น เป็นการหาโดยสังเกตจากความสัมพันธ์ของลำดับที่ของพจน์กับพจน์ของลำดับ ซึ่งในบางครั้งทำได้ยาก เราอาจใช้ฟังก์ชันพหุนามช่วยในการหาพจน์ทั่วไปได้

มีผลต่างแค่ขั้นเดียวใช้ $a_n = an + b$

มีผลต่าง สองขั้นใช้ $a_n = an^2 + bn + c$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 1, - 1, - 3, - 5, - 7, ...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ พิจารณาผลต่างของพจน์สองพจน์ที่อยู่ติดกัน



จะเห็นว่าผลต่างของพจน์สองพจน์ที่อยู่ติดกันมีค่าคงตัวเท่ากับ -2

ให้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป $a_n = an + b$

$$a_1 = 1 = a + b \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$a_2 = -1 = 2a + b \quad \dots\dots\dots(2)$$

จาก (1) จะได้ $a = 1 - b$

แทนค่า $a = 1 - b$ ใน (2) จะได้

$$\begin{aligned} -1 &= 2(1 - b) + b \\ &= 2 - 2b + b + 1 \\ &= 3 - b \\ b &= 3 \end{aligned}$$

จาก $a = 1 - b$ จะได้

$$\begin{aligned} a &= 1 - 3 \\ &= -2 \end{aligned}$$

จะได้ $a_n = -2n + 3$

ตรวจสอบว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้

$$\begin{aligned} \text{จาก } a_n &= -2n + 3 \\ a_1 &= -2(1) + 3 = 1 \\ a_2 &= -2(2) + 3 = -1 \\ a_3 &= -2(3) + 3 = -3 \\ a_4 &= -2(4) + 3 = -5 \\ a_5 &= -2(5) + 3 = -7 \end{aligned}$$

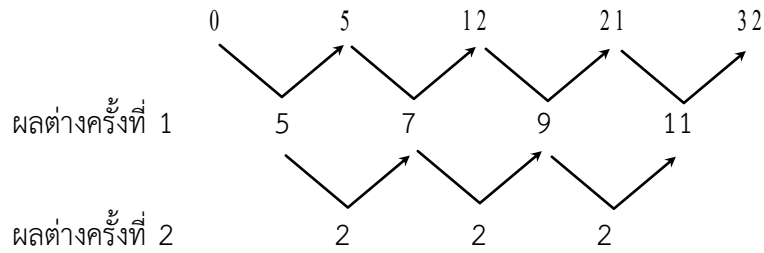
จะเห็นว่า a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 เท่ากับค่าที่กำหนดให้

ดังนั้น $a_n = -2n + 3$



ตัวอย่างที่ 8 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 0, 5, 12, 21, 32, ...

วิธีทำ จากลำดับที่กำหนดให้ พิจารณาผลต่างของพจน์สองพจน์ที่กำหนดให้ที่อยู่ติดกัน



จะเห็นว่าผลต่างครั้งที่สองมีค่าคงที่เท่ากับ 2

ให้พจน์ทั่วไปของลำดับนี้อยู่ในรูป $a_n = an^2 + bn + c$

แทน $n = 1$ จะได้ $a_1 = a + b + c = 0$ (1)

แทน $n = 2$ จะได้ $a_2 = 4a + 2b + c = 5$ (2)

แทน $n = 3$ จะได้ $a_3 = 9a + 3b + c = 12$ (3)

แก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหา a, b และ c ได้ดังนี้

(2) - (1) จะได้ $3a + b = 5$ (4)

(3) - (2) จะได้ $5a + b = 7$ (5)

(5) - (4) จะได้ $2a = 2$
 $a = 1$

แทน $a = 1$ ใน (4) จะได้

$$3(1) + b = 5$$

$$b = 2$$

แทน $a = 1, b = 2$ ใน (1) จะได้

$$1 + 2 + c = 0$$

$$c = -3$$

จะได้ $a_n = n^2 + 2n - 3$

ตรวจสอบว่า a_n ที่หาได้เป็นพจน์ทั่วไปของลำดับที่กำหนดให้

จาก

$$\begin{aligned}
 a_n &= n^2 + 2n - 3 \\
 a_1 &= 1^2 + 2(1) - 3 = 0 \\
 a_2 &= 2^2 + 2(2) - 3 = 5 \\
 a_3 &= 3^2 + 2(3) - 3 = 12 \\
 a_4 &= 4^2 + 2(4) - 3 = 21 \\
 a_5 &= 5^2 + 2(5) - 3 = 32
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 เท่ากับค่าที่กำหนดให้ ดังนั้น

$$a_n = n^2 + 2n - 3$$





แบบฝึกหัด

1. จงเขียน 5 พจน์แรกของลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1) $a_n = \frac{1}{n}$	(2) $a_n = 2n + 3$	(3) $a_n = 5^{n-1}$
(4) $a_n = \frac{1}{n^{n-2}}$	(5) $a_n = \frac{n}{5^{n-1}}$	(6) $a_n = \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n}$
(7) $a_n = \frac{n^2 + 1}{3n}$	(8) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$	(9) $a_n = \sin \frac{np}{2}$

2. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับจำกัดต่อไปนี้

(1) 1, 8, 27, 64, 125 วิธีทำ	(2) 0.4, 0.04, 0.004, 0.0004 วิธีทำ
ตอบ พจน์ทั่วไป คือ	ตอบ พจน์ทั่วไป คือ





<p>(3) 2, 5, 10, 17, ...</p> <p>วิธีทำ</p> <p>ตอบ พจน์ทั่วไป คือ</p>	<p>(4) 2, 6, 12, 20, ...</p> <p>วิธีทำ</p> <p>ตอบ พจน์ทั่วไป คือ</p>
<p>(5) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}, \dots$</p> <p>วิธีทำ</p> <p>ตอบ พจน์ทั่วไป คือ</p>	<p>(6) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, 9\sqrt{3}, \dots$</p> <p>วิธีทำ</p> <p>ตอบ พจน์ทั่วไป คือ</p>

3. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $-1, -4, -7, -10, \dots$

4. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $2, 9, 22, 41, 66, \dots$





😊 การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต

ให้นักเรียนศึกษาการหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต 1, 5, 9, 13, 17, ...

วิธีทำ	ให้	$a_1 = 1$			
		$a_2 = 5$	$=$	$1 + 4$	$= 1 + 1(4)$
		$a_3 = 9$	$=$	$1 + 4 + 4$	$= 1 + 2(4)$
		$a_4 = 13$	$=$	$1 + 4 + 4 + 4$	$= 1 + 3(4)$
		$a_5 = 17$	$=$	$1 + 4 + 4 + 4 + 4$	$= 1 + 4(4)$
		\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
		$a_n = 1 + (n-1)4$	$=$	$1 + 4n - 4$	$= 4n - 3$

ในกรณีทั่วไปถ้า $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต และมี d เป็นผลต่างร่วม จะเขียนพจน์อื่น ๆ ของลำดับเลขคณิตในรูปของ a_1 และ d ดังนี้

a_1	$=$	a_1			
a_2	$=$	$a_1 + d$			
a_3	$=$	$a_2 + d$	$=$	$(a_1 + d) + d$	$= a_1 + 2d$
a_4	$=$	$a_3 + d$	$=$	$(a_1 + 2d) + d$	$= a_1 + 3d$
a_5	$=$	$a_4 + d$	$=$	$(a_1 + 3d) + d$	$= a_1 + 4d$
\vdots	\vdots	\vdots			
a_n	$=$	$a_{n-1} + d$	$=$	$(a_1 + (n-2)d) + d$	$= a_1 + (n-1)d$

จะได้พจน์ที่ n หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิตเป็น $a_n = a_1 + (n-1)d$

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนสี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิต 2, 5, 8, 11, 14, ...

วิธีทำ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 2, d = 3$

$$a_6 = a_5 + d = 14 + 3 = 17 \quad a_7 = a_6 + d = 17 + 3 = 20$$

$$a_8 = a_7 + d = 20 + 3 = 23 \quad a_9 = a_8 + d = 23 + 3 = 26$$

ดังนั้นสี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้คือ 17, 20, 23, 26

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพจน์ที่ 30 ของลำดับเลขคณิต 1, 8, 15, 22, ...

วิธีทำ 1, 8, 15, 22, ... เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 1, d = 7$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

จะได้ $a_n = 1 + (30-1)(7)$

$$a_n = 1 + (29)(7)$$

$$a_n = 1 + 203$$

$$a_n = 204$$





ตัวอย่างที่ 4 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต 8, 3, -2, -7, ...

วิธีทำ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 8$, $d = -5$

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_n &= 8 + (n-1)(-5) \\ a_n &= 8 - 5n + 5 \\ a_n &= -5n + 13 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า 3, a, b, c, d, e, f, g, 35 เป็นก้าวหน้าเรียงกันในลำดับเลขคณิต จงหา f

วิธีทำ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 3$, $a_9 = 35$

$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad a_n &= a_1 + (n-1)d \\ a_9 &= a_1 + 8d \\ 35 &= 3 + 8d \\ 32 &= 8d \\ d &= 4 \end{aligned}$$

หา f ซึ่งเป็นพจน์ที่ 7 ของลำดับเลขคณิตจาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{aligned} a_7 &= a_1 + 6d \\ a_7 &= 3 + 6(4) \\ a_7 &= 3 + 24 \\ a_7 &= 27 \end{aligned}$$

ดังนั้น f มีค่าเท่ากับ 27

ตัวอย่างที่ 6 จงหาพจน์แรกของลำดับเลขคณิตที่มี $a_5 = 19$ และ $a_{20} = 64$

วิธีทำ จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$ $a_5 = a_1 + 4d$ และ $a_{20} = a_1 + 19d$

จะได้ $19 = a_1 + 4d$ (1)

$64 = a_1 + 19d$ (2)

(2) - (1) $45 = 15d$

$d = 3$

แทนค่า $d = 3$ ในสมการ (1)

$a_1 + 4d = 19$

$a_1 + 4(3) = 19$

$a_1 = 19 - 12$

$a_1 = 7$

ดังนั้นพจน์แรกของลำดับเลขคณิตหรือ $a_1 = 7$





ตัวอย่าง 7 จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง 6 และ 20 ที่ทำให้จำนวนทั้งสามเป็นพจน์เรียงกันในลำดับเลขคณิต

วิธีทำ ให้ a เป็นจำนวนที่ต้องการ จะได้ลำดับเลขคณิตเป็น 6, a , 20

$$\text{จากสมบัติของลำดับเลขคณิตจะได้ว่า } a - 6 = 20 - a$$

$$a + a = 20 + 6$$

$$2a = 26$$

$$a = 13$$

ตัวอย่างที่ 8 ถ้า 8, a , b , c , 44 เป็น 5 พจน์ที่เรียงกันในลำดับเลขคณิต จงหา a , b , c

วิธีทำ จาก $a_{n+1} = a_n + d$

$$\text{จะได้ } a = 8 + d$$

$$b = a + d = (8 + d) + d = 8 + 2d$$

$$c = b + d = (8 + 2d) + d = 8 + 3d$$

$$44 = c + d = (8 + 3d) + d = 8 + 4d$$

แล้ว $8 + 4d = 44$

$$4d = 44 - 8$$

$$4d = 36$$

$$d = 9$$

ดังนั้น $a = 8 + 9 = 17$

$$b = 17 + 9 = 26$$

$$c = 26 + 9 = 35$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาว่าระหว่าง 1000 กับ 2000 มีจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัวทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ จำนวนแรกที่ยังมากกว่า 1000 และ 7 หารลงตัวคือ 1001

จำนวนสุดท้ายที่น้อยกว่า 2000 และ 7 หารลงตัวคือ 1995

ลำดับเลขคณิตที่เกิดขึ้นคือ 1001, 1008, 1015, ..., 1995 มี $a_1 = 1001$, $d = 7$, $a_n = 1995$

จาก $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$1995 = 1001 + (n-1)7$$

$$1995 - 1001 = (n-1)7$$

$$994 = (n-1)7$$

$$142 = n-1$$

$$n = 142 + 1$$

$$n = 143$$

ดังนั้นระหว่าง 1000 กับ 2000 มีจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัวทั้งหมด 143 จำนวน





แบบฝึกหัด “ลำดับเลขคณิต”

1. จงตรวจว่าลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นลำดับเลขคณิตหรือไม่

ข้อ	ลำดับ	ผลต่างร่วม	เป็นลำดับเลขคณิต
1	2, 6, 10, 14, ...		
2	3, 9, 12, 15, 18, ...		
3	5, 11, 17, 23, 29, ...		
4	10, 20, 40, 80, ...		
5	-7, -5, -3, -1, 2, 4, ...		
6	5, 10, 15, 20, ...		
7	1, 2, 4, 8, 16, ...		
8	90, 80, 70, 60, 50, ...		
9	-10, -13, -16, -19, -21, ...		
10	1.2, 1.4, 1.6, 1.8, ...		

2. จงเขียนสี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิต 5, 8, 11, 14, ...

วิธีทำ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = \dots\dots\dots$, $d = \dots\dots\dots$

.....

.....

.....

.....

ดังนั้นสี่พจน์ถัดไปของลำดับเลขคณิตที่กำหนดให้คือ

3. จงหาพจน์ที่ 50 ของลำดับเลขคณิต -5, -1, 3, 7, 11, ...

วิธีทำ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = \dots\dots\dots$, $d = \dots\dots\dots$

.....

.....

.....

.....

4. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต 8, 12, 16, 20, ...

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....





5. ถ้า 5, a, b, c, 29 เป็นห้าพจน์ที่เรียงกันในลำดับเลขคณิต จงหา a, b, c

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

6. ถ้า 3, a, b, c, d, e, f, g, h, i, 52 เป็นสิบเอ็ดพจน์ที่เรียงกันในลำดับเลขคณิต จงหา f

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

7. จงหาพจน์ที่สิบ ของลำดับเลขคณิตที่มี $a_6 = 15$ และ $a_{20} = 43$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





😊 **ตัวกลางเลขคณิต**

ให้ x เป็นตัวกลางเลขคณิต 1 พจน์ระหว่าง a และ b

ดังนั้น a, x, b เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งได้ผลต่างร่วมเท่ากัน

จะได้ $x - a = b - x$

$$2x = a + b$$

นั่นคือ

$$x = \frac{a + b}{2}$$

ให้ $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_k$ เป็นตัวกลางเลขคณิต k พจน์ระหว่าง a และ b

ดังนั้น $a, x_1, x_2, \dots, x_k, b$ เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต

ที่มี $a_1 = a$ และ $a_{k+2} = b$ หาค่า d

จาก $a_1 + (n - 1)d = a_n$

$$a + (k + 2 - 1)d = b$$

$$a + (k + 1)d = b$$

ดังนั้น

$$d = \frac{b - a}{k + 1}$$

จะได้ $x_1 = a + d, x_2 = a + 2d, x_3 = a + 3d, \dots, x_n = a + kd,$

ตัวอย่างที่ 61 จงหาตัวกลางเลขคณิตจากข้อกำหนดต่อไปนี้

(1) 1 จำนวนระหว่าง 2 และ -10

(2) 4 จำนวนระหว่าง 10 และ 27

วิธีทำ

(1) ให้ลำดับเลขคณิตคือ $2, x, -10$

จะได้ ตัวกลางเลขคณิตที่ต้องการ คือ

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + b}{2} \\ &= \frac{2 + (-10)}{2} \\ &= -4 \end{aligned}$$





(2) จากลำดับเลขคณิต คือ $10, x_1, x_2, x_3, x_4, 27$

ให้ $a = 10, b = 27, k = 4$

$$\text{จาก } d = \frac{b - a}{k + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } d &= \frac{27 - 10}{4 + 1} \\ &= \frac{17}{5} = 3\frac{2}{5} \end{aligned}$$

จะได้ลำดับเลขคณิต คือ $10, 13\frac{2}{5}, 16\frac{4}{5}, 20\frac{1}{5}, 23\frac{3}{5}, 27$

ดังนั้นตัวกลางเลขคณิต 4 จำนวนที่ต้องการ คือ $13\frac{2}{5}, 16\frac{4}{5}, 20\frac{1}{5}, 23\frac{3}{5}$

ตัวอย่างที่ 62 จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง 9 และ 15 ที่ทำให้จำนวนทั้งสามนั้นเป็นพจน์สามพจน์เรียงกันในลำดับเลขคณิต

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนที่ต้องการ

จะได้ $9, x, 15$ เป็นลำดับเลขคณิต

ตัวกลางเลขคณิต คือ

$$\begin{aligned} x &= \frac{a + b}{2} \\ &= \frac{9 + 15}{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

ดังนั้น ตัวกลางเลขคณิตที่ต้องการ คือ 12

ตัวอย่างที่ 63 จงหาผลบวกของจำนวน 6 จำนวนที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 36 แล้วทำให้ทั้ง 8 จำนวนเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต

วิธีทำ ให้ลำดับเลขคณิต คือ $1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, 36$

ให้ $a = 1, b = 36, k = 6$

$$\text{จาก } d = \frac{b - a}{k + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } d &= \frac{36 - 1}{6 + 1} \\ &= \frac{35}{7} = 5 \end{aligned}$$

จะได้ลำดับเลขคณิต คือ $1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36$

ดังนั้นผลบวกของจำนวน 6 จำนวนที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 36 เท่ากับ $6 + 11 + 16 + 21 + 26 + 31 = 111$





😊 ลำดับเรขาคณิต

พิจารณาลำดับ 3, 6, 12, 24, 48, ... จะเห็นว่าอัตราส่วนของพจน์หลังหารด้วยพจน์หน้าที่อยู่ติดกันมีค่าคงที่เท่ากับ 2 เช่น $\frac{6}{3}=2$, $\frac{12}{6}=2$, $\frac{24}{12}=2$, $\frac{48}{24}=2$

ลำดับเรขาคณิต เป็นลำดับที่มีอัตราส่วนที่ได้จากการนำพจน์ที่ $n+1$ หารด้วยพจน์ที่ n มีค่าคงที่เรียกว่า อัตราส่วนร่วม แทนด้วยสัญลักษณ์ “ r ”

ให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ เป็นลำดับ ถ้า $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

แล้ว $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต

บทนิยาม ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่มีอัตราส่วนของพจน์ที่ $n + 1$ ต่อพจน์ที่ n มีค่าคงตัว ค่าคงตัวนี้เรียกว่า อัตราส่วนร่วม แทนด้วย r

การตรวจสอบว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับเรขาคณิตหรือไม่

ข้อ	ลำดับ	อัตราส่วนร่วม	เป็นลำดับเรขาคณิต
1	2, 4, 8, 16, 32, ...	$\frac{4}{2}=2, \frac{8}{4}=2, \frac{16}{8}=2$ คงที่	/
2	3, 9, 27, 81, 243, ...	$\frac{9}{3}=3, \frac{27}{9}=3, \frac{81}{27}=3$ คงที่	/
3	5, 20, 80, 320, ...	$\frac{20}{5}=4, \frac{80}{20}=4, \frac{320}{80}=4$ คงที่	/
4	10, 20, 30, 40,	$\frac{20}{10}=2, \frac{30}{20}=\frac{3}{2}, \frac{40}{30}=\frac{4}{3}$ ไม่คงที่	×
5	-1, -4, -16, -64, -256, ...	$\frac{-4}{-1}=4, \frac{-16}{-4}=4, \frac{-64}{-16}=4$ คงที่	/

การหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต

ให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี a_1 เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วมจะเขียนพจน์อื่น ๆ ของลำดับเรขาคณิตในรูป a_1 และ r ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r = (a_1 r) r = a_1 r^2 \\ a_4 &= a_3 r = (a_1 r^2) r = a_1 r^3 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อกำหนดให้ a_1 เป็นพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ เท่ากับ r เป็นอัตราส่วนร่วมจะได้พจน์ที่ n

หรือพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิตนี้คือ

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$





ตัวอย่าง 1 จงเขียนสามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิต 5, 20, 80, 320, ...

วิธีทำ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 5$, $r = 4$

$$a_5 = a_4 r = 320(4) = 1280$$

$$a_6 = a_5 r = 1280(4) = 5120$$

$$a_7 = a_6 r = 5120(4) = 20480$$

ดังนั้นสามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้คือ 1280, 5120, 20480

ตัวอย่าง 2 จงเขียนสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 2$ และ $r = \frac{3}{2}$

วิธีทำ $a_1 = 2$

$$a_2 = a_1 r = 2\left(\frac{3}{2}\right) = 3$$

$$a_3 = a_2 r = 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

$$a_4 = a_3 r = \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{4}$$

ดังนั้นสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้คือ 2, 3, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$

ตัวอย่าง 3 จงเขียนพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิต 2, 6, 18, 54, ...

วิธีทำ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 2$, $r = 3$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_8 = a_1 r^{8-1}$$

$$a_8 = 2(3^7)$$

$$a_8 = 2(2187)$$

$$a_8 = 4374$$

ดังนั้นพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิตนี้คือ 4374

ตัวอย่าง 4 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต 8, 16, 32, 64, ...

วิธีทำ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี $a_1 = 8$, $r = 2$

$$\text{จาก } a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = 8(2^{n-1})$$

$$a_n = 2^3(2^{n-1})$$

$$a_n = 2^{3+n-1}$$

$$a_n = 2^{n+2}$$

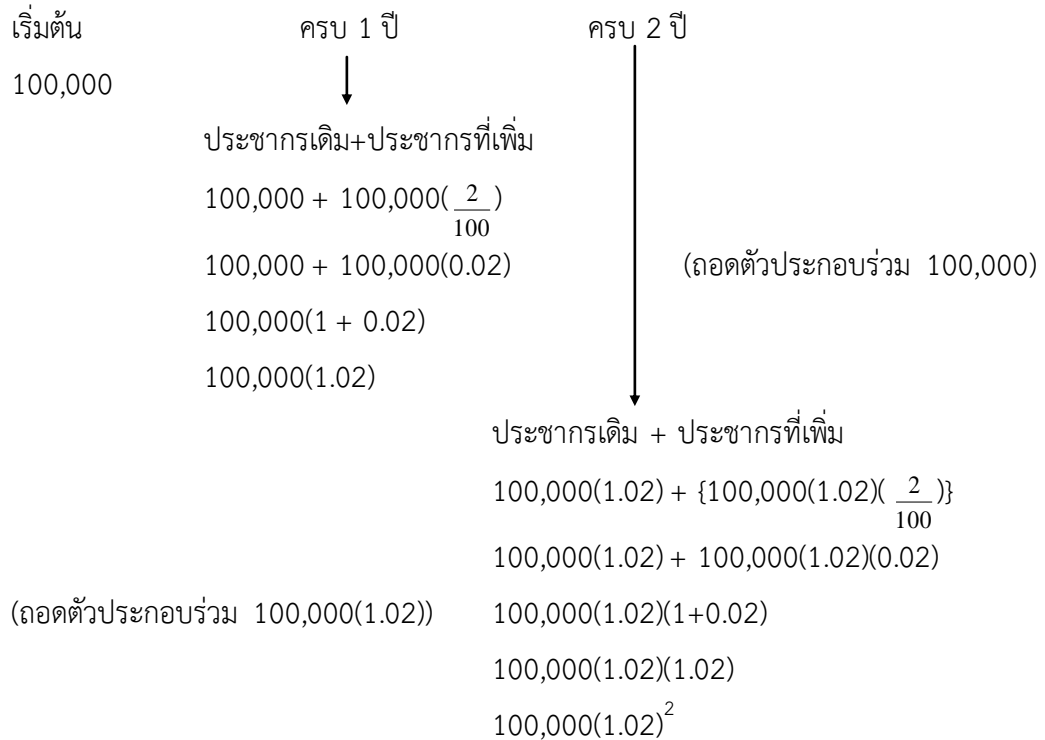
ดังนั้นพจน์ทั่วไปของลำดับคือ $a_n = 2^{n+2}$



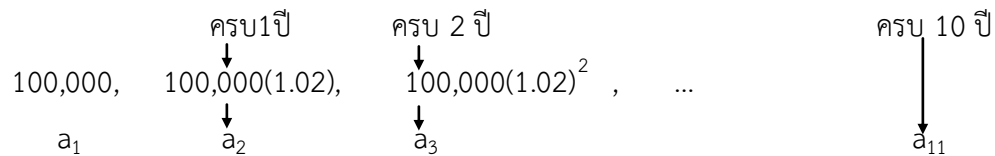


ตัวอย่าง 5 ในเมืองแห่งหนึ่งมีประชากร 100000 คน ถ้าจำนวนประชากรในเมืองนี้เพิ่มขึ้น 2 % ทุกปี จงหาจำนวนประชากรในเมืองนี้ในอีก 10 ปีข้างหน้า

วิธีทำ พิจารณาจำนวนประชากรใน 2 ปีแรกดังนี้



จะเห็นว่าจำนวนประชากรในแต่ละปีเมื่อเขียนเรียงตามลำดับจะเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี 1.02 เป็นอัตราส่วนร่วมดังนี้



จาก

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$a_{11} = a_1 r^{10}$$

$$a_{11} = 100,000(1.02)^{10}$$

$$a_{11} \approx 100,000(1.218994)$$

$$a_{11} \approx 121,899$$

ดังนั้น ในอีก 10 ปีข้างหน้าเมืองนี้จะมีประชากรประมาณ 121,899 คน





😊 ตัวกลางเรขาคณิต

ให้ x เป็นตัวกลางเรขาคณิตระหว่าง a และ b

ดังนั้น a, x, b เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต

จากบทนิยามต้องมีอัตราส่วนร่วมเท่ากัน

จึงได้สมการ $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ จะได้ $x^2 = ab$

นั่นคือ

$$x = \sqrt{ab}$$

ให้ $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_k$ เป็นตัวกลางเรขาคณิต k พจน์ระหว่าง a และ b

ดังนั้น $a, x_1, x_2, \dots, x_k, b$ เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต

โดยที่ $a_1 = a$ และ $a_n = b$

และ $n = k + 2$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $b = a r^{(k+2)-1}$

ดังนั้น

$$r = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

ซึ่งจะได้

$$x_1 = ar, \quad x_2 = ar^2$$

$$x_3 = ar^3, \dots, x_k = ar^k$$

ตัวกลางเรขาคณิตของ a และ c เท่ากับ \sqrt{ac} หรือ $-\sqrt{ac}$ หรือ $\pm\sqrt{ac}$

ตัวอย่างที่ 6 ถ้า $3, x, 75$ เป็นจำนวนจริง 3 จำนวนซึ่งเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิตแล้ว จงหา x

วิธีทำ ตัวกลางเรขาคณิตที่ต้องการ คือ

$$x = \sqrt{ab}$$

$$= \sqrt{3 \cdot 75}$$

$$= \sqrt{225}$$

$$= 15$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาตัวกลางเรขาคณิตของ 4 และ 9

วิธีทำ จากสูตรข้างต้น

จะได้ว่า ตัวกลางเรขาคณิตของ 4 และ 9

$$= \sqrt{4 \times 9} \text{ หรือ } -\sqrt{4 \times 9}$$

$$= \sqrt{36} \text{ หรือ } -\sqrt{36}$$

$$= 6 \text{ หรือ } -6$$





แบบฝึกหัด “ลำดับเรขาคณิต”

1. จงตรวจสอบว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับเรขาคณิตหรือไม่

ข้อ	ลำดับ	อัตราส่วนร่วม	เป็นลำดับเรขาคณิต
1	2, -4, 8, -16, 32, ...		
2	3, 6, 18, 36, 108, ...		
3	5, 15, 45, 135, ...		
4	10, 20, 60, 120,		
5	-1, 4, -16, 64, -256, ...		
6	$\frac{3}{4}, 3, 12, 48, \dots$		
7	125, -25, 5, -1, ...		
8	90, 30, 15, 5, ...		
9	$\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \dots$		
10	9, 12, 16, $\frac{64}{3}, \dots$		

ตัวอย่างย่อย จงเขียนสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 3, r = 2$

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = a_1 r = (3)(2) = 6$$

$$a_3 = a_2 r = (6)(2) = 12$$

$$a_4 = a_3 r = (12)(2) = 24$$

ดังนั้นสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 3, r = 2$ คือ 3 , 6 , 12 , 24

2. จงเขียนสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 3$ และ $r = 4$

วิธีทำ.....
.....
.....
.....

ดังนั้นสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้คือ

3. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 5, r = -3$

วิธีทำ.....
.....
.....
.....





4. จงหาสี่พจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = 100, r = -\frac{1}{2}$

วิธีทำ.....

5. จงเขียนสามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิต 4, 12, 36, 108, ...

วิธีทำ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = \dots\dots\dots$, $r = \dots\dots\dots$
 $a_5 = a_4r = \dots\dots\dots$
 $a_6 = a_5r = \dots\dots\dots$
 $a_7 = a_6r = \dots\dots\dots$
 ดังนั้นสามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิตที่กำหนดให้คือ

6. จงเขียนสามพจน์ถัดไปของลำดับเรขาคณิต 1, -2, 4, -8, ...

วิธีทำ.....

7. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิตที่ $a_1 = 5, r = 2$

พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$

$$a_{10} = a_1 r^9$$

$$a_{10} = (5)(2)^9$$

$$a_{10} = (5)(512)$$

$$a_{10} = 2560$$

พจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิตที่ $a_1 = 5, r = 2$ คือ 2560

8. จงเขียนพจน์ที่ 7 ของลำดับเรขาคณิต 2, 10, 50, ...

วิธีทำ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = \dots\dots\dots$, $r = \dots\dots\dots$

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$ $a_7 = a_1 r^{7-1}$

.....





9. จงเขียนพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิต 9, 18, 36, ...

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....

10. จงหาพจน์ที่ 8 ของลำดับเรขาคณิตที่ $a_1 = -5, r = -3$

วิธีทำ.....
.....
.....
.....

11. จงหาพจน์ที่ 9 ของลำดับเรขาคณิตที่ $a_1 = 12, r = -3$

วิธีทำ.....
.....
.....
.....

12. จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับเรขาคณิตที่ $a_1 = 12, r = -3$

วิธีทำ.....
.....
.....
.....

13. จงหาพจน์ที่ 9 ของลำดับเรขาคณิตที่ $a_1 = 4, r = \frac{1}{2}$

วิธีทำ.....
.....
.....





14. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$

เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $a_1 = \frac{1}{8}$ และ $r = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{1} = 2$

พจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$ แทนค่า $a_1 = \frac{1}{8}$, $r = 2$

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....

15. จงหาว่า 512 เป็นพจน์ที่เท่าใดของลำดับ $\frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \dots$

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....

16. ลำดับเรขาคณิตมีพจน์แรกเป็น 8 และอัตราส่วนร่วมเป็น $\frac{3}{2}$ แล้ว $\frac{729}{8}$ เป็นพจน์ที่เท่าใด

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....

17. จงหาพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์ที่ 6 เป็น -486 และมี 3 เป็นอัตราส่วนร่วม

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....



18. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต 9, 27, 81, ...

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....

19. จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต -4, 8, -16, 32, ...

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....

20. จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง 5 และ 20 ที่ทำให้จำนวนทั้งสามนั้นเป็นพจน์เรียงกันในลำดับเรขาคณิต

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

21. ในการคิดดอกเบี้ยเงินฝากแบบประจำ 10 ปีของบริษัทเงินทุนหลักทรัพย์ ถ้าบริษัทคิดอัตราดอกเบี้ยร้อยละ 5 ต่อปีและนำดอกเบี้ยของแต่ละปีทบเป็นเงินต้นเช่นนี้เรื่อยไป นายชาวตกลงใจฝากประเภทนี้ด้วยเงินจำนวน 100,000 บาท จงหาว่าเมื่อครบกำหนด 10 นายชาวไปถอนเงินเขาจะได้รับเงินทั้งหมดกี่บาท

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....





.....
.....
.....

22. จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง 5 และ 20 ที่ทำให้ทั้งสามจำนวนเรียงกันในลำดับเรขาคณิต

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....

23. จงหาจำนวนที่อยู่ระหว่าง -8 และ -12 ที่ทำให้ทั้งสามจำนวนเรียงกันในลำดับเรขาคณิต

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....

24. จำนวนที่หารด้วย 8 และ 10 ที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....

25. จำนวนที่หารด้วย 8 หรือ 10 ที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ.....
.....
.....
.....
.....





อนุกรม

ถ้ากำหนดลำดับชุดหนึ่งซึ่งประกอบด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เรียกลำดับชุดนี้ว่าลำดับจำกัด และผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับชุดนี้คือ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ เรียกว่า “อนุกรมจำกัด”

ข้อ	ลำดับจำกัด	อนุกรมจำกัด
1	1, 3, 5, 7, 9	$1 + 3 + 5 + 7 + 9$
2	5, 10, 15, 20, 25, 30	$5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30$
3	2, 4, 8, 16, 32	$2 + 4 + 8 + 16 + 32$
4	3, 8, 13, 18, ... , 103	$3 + 8 + 13 + 18 + \dots + 103$
5	-4 , -6, -8, -10	$(-4) + (-6) + (-8) + (-10)$

✪ กิจกรรม

จงเขียนอนุกรมจากลำดับที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ข้อ	ลำดับจำกัด	อนุกรมจำกัด(ข้อละ 1 คะแนน)
1	7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56	
2	5, 12, 22, 29, 36, 45	
3	10, 18, 26, 34, 42, 50, 58, 66	
4	-1, -4, -7, -10	
5	5, 10, 15, 20, ... , 50	

😊 อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต คืออนุกรมที่ได้จากลำดับเลขคณิต และผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิตจะเป็นผลต่างร่วมของอนุกรมเลขคณิตด้วย

กำหนดลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots, a_n$

ถ้า S_n แทนสัญลักษณ์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต หมายความว่า

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

เช่น $S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$S_9 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9$$





จงหาอนุกรมเลขคณิตจากลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

ข้อ	ลำดับเลขคณิต	จำนวนพจน์	อนุกรมเลขคณิต (S_n)
1	1, 3, 5, 7	4	$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$
2	2, 9, 16, 23, 30, 37	6	$S_6 = 2 + 9 + 16 + 23 + 30 + 37 = 117$
3	5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40	8	$S_8 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35 + 40 = 180$

✎ **กิจกรรม** จงหาอนุกรมเลขคณิตจากลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

ข้อ	ลำดับเลขคณิต	จำนวนพจน์	อนุกรมเลขคณิต (S_n) (ข้อละ 1 คะแนน)
1	100, 90, 80, 70, 60, 50, 40		
2	-2, -4, -6, -8, -10		
3	-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7		
4	1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50		
5	75, 73, 71, 69		
6	12, 15, 18, 21, 24, 27		

☺ **การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตโดยใช้สูตร** $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

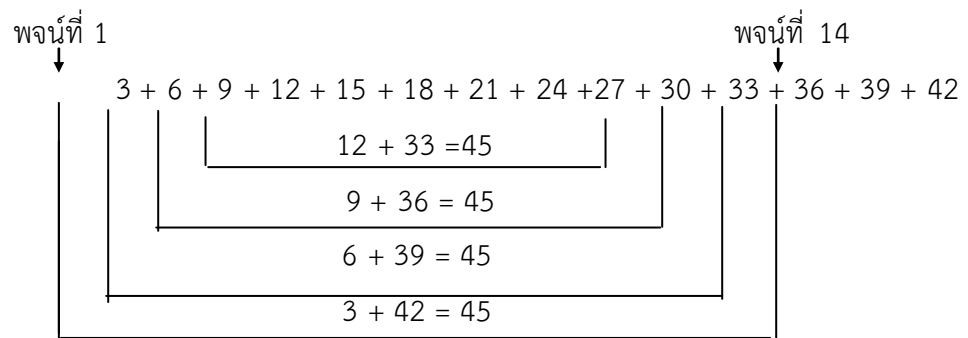
กำหนดลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$

ถ้า S_n แทนสัญลักษณ์ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต หมายความว่า

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

นักเรียนจะเห็นว่า การหาอนุกรมเลขคณิตด้วยการบวกสะสมตั้งแต่พจน์แรกจนถึงพจน์สุดท้ายสามารถทำได้เมื่อจำนวนพจน์ของอนุกรมมีไม่มาก

แต่ถ้าจำนวนพจน์ของอนุกรมมีจำนวนมาก เช่น เมื่อต้องการหาค่า S_{359} จะต้องทำการหาผลบวกโดยการบวกสะสมตั้งแต่พจน์ที่ 1 ถึงพจน์ที่ 359 จะทำให้เสียเวลาในการคำนวณ นักคณิตศาสตร์จึงทำการศึกษารูปของอนุกรมเลขคณิตเพื่อหาสูตรในการคำนวณ ดังนี้ เช่น ต้องการหาผลบวกพจน์ทุกพจน์ของ $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 42$ เมื่อทำการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของอนุกรมจะพบว่า





▶ เอกสารประกอบการเรียน เรื่อง “ลำดับและอนุกรม” วิชาคณิตศาสตร์ ชั้น ม.5

จะพบว่าผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของอนุกรมเลขคณิต $3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 42$ เมื่อทำการจับคู่พจน์ที่ 1 กับพจน์ที่ 14 พจน์ที่ 2 กับพจน์ที่ 13 ... หาผลบวกแต่ละคู่ได้ค่า 45 ทั้งหมด 7 คู่ทำให้ได้ผลรวมของพจน์ทุกพจน์เป็น $7 \times 45 = 315$

$$\text{ดังนั้น } 3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 42 = 315$$

จากความรู้ข้างต้นนำแบบรูปที่ได้ไปหาพจน์ทั่วไปของการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต ได้ดังนี้

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \dots(1)$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + \{a_1 + (n-1)d\} \quad \dots(2)$$

และจาก (1) อาจเขียนใหม่เป็น

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + \{a_n - (n-1)d\} \quad \dots(3)$$

(2) + (3) :

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)$$

\uparrow $\xrightarrow{\quad n \text{ พจน์} \quad}$ \uparrow

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

 เป็นสูตรในการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

เมื่อ n เป็นจำนวนพจน์ที่ต้องการหาผลบวก a_1 = พจน์แรกของลำดับ a_n = พจน์สุดท้ายของลำดับ

ข้อสังเกต จากสูตรการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตจะเห็นว่านักเรียนต้องทราบ 3 ค่า เพื่อนำมาแทนค่าในสูตร ซึ่งได้แก่ 1.....

2.....

3.....





จงศึกษาการหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตโดยใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

ข้อ	อนุกรมเลขคณิต	หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตโดยใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
1	$1 + 3 + 5 + 7$ วิธีทำ เป็นอนุกรมเลขคณิต $n = 4$ $a_1 = 1$ $a_4 = 7$	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $S_4 = \frac{4}{2}(a_1 + a_4)$ $S_4 = \frac{4}{2}(1+7)$ $= (2)(8)$ $= 16$ ดังนั้น $1 + 3 + 5 + 7 = 16$
2	$4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22$ วิธีทำ เป็นอนุกรมเลขคณิต $n = 7$ $a_1 = 4$ $a_7 = 22$	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $S_7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_7)$ $S_7 = \frac{7}{2}(4 + 22)$ $S_7 = \frac{7}{2}(26)$ $S_7 = 7(13)$ $S_7 = 91$ ดังนั้น $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22 = 91$
3	$5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30 + 35$ $+ 40 + 45 + 50$ วิธีทำ เป็นอนุกรมเลขคณิต $n = 10$ $a_1 = 5$ $a_{10} = 50$	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $S_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10})$ $S_{10} = \frac{10}{2}(5+50)$ $S_{10} = 5(55)$ $S_{10} = 275$ ดังนั้น $5 + 10 + 15 + \dots + 40 + 45 + 50 = 275$
4	$(-14) + (-9) + (-4) + 1 + 6 + 11 +$ $16 + 21$ วิธีทำ เป็นอนุกรมเลขคณิต $n = 8$ $a_1 = -14$ $a_8 = 21$	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ $S_8 = \frac{8}{2}(a_1 + a_8)$ $S_8 = 4\{(-14) + 21\}$ $S_8 = 4(7)$ $S_8 = 28$ ดังนั้น $(-14) + (-9) + (-4) + 1 + \dots + 16 + 21 = 28$





⊕ **กิจกรรม** จงหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตโดยใช้สูตร

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

ข้อ	อนุกรมเลขคณิต	หาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต โดยใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
1	$10 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90$ $n =$ $a_1 =$ $a_9 =$	
2	$(-2) + (-4) + (-6) + (-8) + (-10)$	
3	$(-10) + (-7) + (-4) + (-1) + 2 + 5 + 8 + 11$	
4	$3 + 10 + 17 + 24 + 31 + 38 + 45 + 52 + 59 +$ $66 + 73 + 80 + 87 + 94 + 101$	





☺ การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิตโดยใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \dots \text{สูตรที่ 1} \quad \text{ใช้เมื่อทราบค่า } n, a_1, a_n$$

และ จากความสัมพันธ์ของลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n-1)d$ นำแทนค่าในสูตรที่ 1

$$s_n = \frac{n}{2}[a_1 + \{a_1 + (n-1)d\}]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \quad \dots \text{สูตรที่ 2} \quad \text{ใช้เมื่อทราบค่า } n, a_1, d$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $7 + 15 + 23 + \dots$

วิธีที่ 1 ใช้สูตรที่ 1 $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

อนุกรมเลขคณิตมี $n = 20$, $a_1 = 7$
แต่ไม่ทราบ a_{20} ว่ามีค่าเท่าใดนำความรู้เรื่อง
ลำดับเลขคณิตมาช่วยในการคำนวณหาค่า a_{20}

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{20} = 7 + (20-1)8$$

$$a_{20} = 7 + (19)(8)$$

$$a_{20} = 7 + 152$$

$$a_{20} = 159$$

หาอนุกรมเลขคณิตจาก $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(7 + 159)$$

$$S_{20} = (10)(166)$$

$$S_{20} = 1,660$$

วิธีที่ 2 ใช้สูตรที่ 2

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

อนุกรมเลขคณิตมี $n = 20$, $a_1 = 7$, $d = 8$

แทนค่า

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\{2(7) + (20-1)8\}$$

$$S_{20} = 10\{14 + (19)8\}$$

$$S_{20} = 10(14 + 152)$$

$$S_{20} = 10(166)$$

$$S_{20} = 1,660$$

ดังนั้น ผลบวก 20 พจน์แรกของอนุกรมเลขคณิต $7 + 15 + 23 + \dots = 1,660$

ข้อสังเกต นักเรียนพิจารณาว่าควรเลือกใช้สูตรที่ 1 หรือสูตรที่ 2 และเพราะเหตุใดจึงเลือกใช้

.....





ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวก พจน์ทุกพจน์ของ อนุกรมเลขคณิต $10 + 13 + \dots + 157$

วิธีทำ จาก $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

ขั้นตอนที่ 1 อนุกรมเลขคณิตมี $a_1 = 10$, $a_n = 157$

แต่ไม่ทราบค่า n ว่าอนุกรมชุดนี้มีทั้งหมดกี่พจน์ นำความรู้เรื่องลำดับเลขคณิตมาคำนวณหาค่า n

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$157 = 10 + (n-1)3$$

$$157 - 10 = (n-1)3$$

$$147 = (n-1)3$$

$$\frac{147}{3} = n-1$$

$$49 = n-1$$

$$49 + 1 = n$$

$$50 = n$$

ขั้นตอนที่ 2

นำค่า n มาใช้ในการหาอนุกรม ซึ่งอาจเลือกใช้สูตรในการคำนวณ 2 วิธีเช่น

วิธีที่ 1

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_{50} = \frac{50}{2}(10 + 157)$$

$$S_{50} = 25(167)$$

$$S_{50} = 4,175$$

วิธีที่ 2

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$S_{50} = \frac{50}{2}\{2(10) + (50-1)3\}$$

$$S_{50} = 25\{20 + (49)3\}$$

$$S_{50} = 25\{20 + 147\}$$

$$S_{50} = 25(167)$$

$$S_{50} = 4,175$$

ดังนั้น $7 + 10 + 13 + \dots + 157 = 4,175$

ข้อสังเกต นักเรียนคิดว่าการหาค่า S_n ในขั้นตอนที่ 2 ใช้วิธีที่ 1 กับวิธีที่ 2 อย่างไหนง่ายกว่าเพราะเหตุใด

.....

.....

.....





⊕ **กิจกรรม** ให้นักเรียนนำความรู้เรื่องอนุกรมเลขคณิตคำนวณหาค่าต่อไปนี้

1. จงหาผลบวกของ 30 พจน์แรกของ อนุกรมเลขคณิต $3 + 5 + 7 + 9 + \dots$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของอนุกรมเลขคณิต $8 + 15 + 22 + 29 + \dots + 876$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....





การนำความรู้เรื่องอนุกรมเลขคณิตไปใช้

ให้นักเรียนศึกษาการนำความรู้เรื่องอนุกรมเลขคณิตแก้โจทย์ปัญหาต่อไปนี้

1. จงหาผลบวกของจำนวนคู่ ตั้งแต่ 12 ถึง 600

วิธีทำ อนุกรมที่เกิดขึ้น คือ $12 + 14 + 16 + \dots + 600$ มี $a_1 = 12, d = 2, a_n = 600$

แต่ไม่ทราบค่า n ว่าอนุกรมชุดนี้มีทั้งหมดกี่พจน์ นำความรู้เรื่องลำดับเลขคณิตมาคำนวณหาค่า n

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 600 &= 12 + (n-1)2 \\ 600 - 12 &= (n-1)2 \\ 588 &= (n-1)2 \\ \frac{588}{2} &= n-1 \\ 294 &= n-1 \\ 294 + 1 &= n \\ 295 &= n \end{aligned}$$

อนุกรมชุดนี้มีทั้งหมด 295 พจน์



$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ S_{295} &= \frac{295}{2}(12 + 600) \\ S_{295} &= \frac{295}{2}(612) \\ S_{295} &= 295(306) \\ S_{295} &= 90,270 \end{aligned}$$

ผลบวกของจำนวนคู่ ตั้งแต่ 12 ถึง 600 = 90,270

2. จงหาผลบวกของจำนวนที่เป็นพหุคูณของ 7 ที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000

วิธีทำ พหุคูณของ 7 หมายถึงจำนวนที่หารด้วย 7 ได้ลงตัว

ได้ลงตัว ที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 จำนวนแรกคือ 105 จำนวนสุดท้ายคือ 994

อนุกรมที่เกิดขึ้นคือ $105 + 112 + 119 + \dots + 994$ มี $a_1 = 105, d = 7, a_n = 994, n = ?$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 994 &= 105 + (n-1)7 \\ 994 - 105 &= (n-1)7 \\ 889 &= (n-1)7 \\ \frac{889}{7} &= n-1 \\ 127 &= n-1 \\ 127 + 1 &= n \\ 128 &= n \\ S_n &= \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \\ S_{128} &= \frac{128}{2}(105 + 994) \\ S_{128} &= 64(1,099) \\ S_{128} &= 70,336 \end{aligned}$$

ผลบวกของจำนวนที่เป็นพหุคูณของ 7 ที่อยู่ระหว่าง 100 ถึง 1,000 = 70,336





😊อนุกรมเรขาคณิต

คือ ผลบวกของลำดับเรขาคณิตตั้งแต่พจน์ที่ 1 ถึง พจน์ที่ n

อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตเป็นอัตราส่วนร่วมของอนุกรมเรขาคณิตด้วย

ตัวอย่าง 1 พิจารณา ลำดับ 1 , 3 , 9 , 27 , , 6561

พบว่าเป็นลำดับเรขาคณิตที่มี อัตราส่วนร่วมเป็น 3

การหาผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับเรขาคณิตข้างต้นทำได้ดังนี้

ให้ $S_n = 1 + 3 + 9 + 27 + + 6,561 \quad \dots\dots\dots(1)$

$$3 S_n = 3(1 + 3 + 9 + 27 + + 6,561)$$

$$3 S_n = 3 + 9 + 27 + + 6,561 + 19,683 \quad \dots\dots\dots(2)$$

จาก (2) - (1) $2 S_n = 19,683 - 1$

$$2 S_n = 19,682$$

$$S_n = 9,841$$

ดังนั้น $1 + 3 + 9 + 27 + + 6,561 = 9,841$

การหาผลบวก n พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิตโดยใช้สูตร

จาก $a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + + a_1r^{n-1}$ ได้ดังนี้

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + + a_1r^{n-1} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$r S_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + + a_1r^{n-1} + a_1r^n \quad \dots\dots\dots(4)$$

(4) - (3) $r S_n - S_n = a_1r^n - a_1$

$$S_n (r - 1) = a_1r^n - a_1$$

$$S_n = \frac{a_1r^n - a_1}{r - 1}$$
$$= \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

สูตรที่ 1

$$= \frac{a_1(-1+r^n)}{(-1+r)}$$
$$= \frac{a_1(\cancel{-1})(1-r^n)}{(\cancel{-1})(1-r)}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

สูตรที่ 2





และอาจเขียนผลบวก n พจน์แรกได้อีกแบบหนึ่งดังนี้

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \\ &= \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} \\ &= \frac{a_1 - a_1 r^{n-1} r}{1-r} \quad \text{แต่ } a_n = a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1 \quad \text{สูตรที่ 3}$$

สรุปได้ว่า การหาอนุกรมเรขาคณิตหาได้จากสูตร 3 สูตรคือ

$$\begin{aligned} 1. \quad S_n &= \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1 \\ 2. \quad S_n &= \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1 \\ 3. \quad S_n &= \frac{a_1 - a_n r}{1 - r} \quad \text{เมื่อ } r \neq 1 \end{aligned}$$

นักเรียนร่วมกันสังเกตว่าทั้ง 3 สูตรมีความเหมาะสมในการใช้ในสถานการณ์ใด

ตัวอย่าง 1 จงหาผลบวกแปดพจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = 1$, $r = 2$, $n = 8$

$$\begin{aligned} \text{จาก } S_n &= \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \\ S_8 &= \frac{1(2)^8 - 1}{2 - 1} = \frac{2^8 - 1}{1} = \frac{256 - 1}{1} = 255 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลบวกแปดพจน์แรกของลำดับเรขาคณิตคือ 255

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลบวกสิบพจน์แรกของลำดับเรขาคณิต $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$

วิธีทำ อนุกรมที่กำหนดให้มี $a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{3}$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^{10})}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^{10})}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \{1 - (\frac{1}{3})^{10}\}$$

$$S_n = \frac{3}{4} \{1 - (\frac{1}{3})^{10}\} = \frac{3}{4} (1 - \frac{1}{59049}) = (\frac{3}{4})(\frac{59048}{59049}) = \frac{14762}{19683}$$





ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของอนุกรมเรขาคณิต

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{256}$$

วิธีทำ จากอนุกรมเรขาคณิตที่กำหนดให้ มี $a_1 = 1$, $r = \frac{1}{2}$

เนื่องจากไม่ทราบว่าลำดับชุดนี้มีทั้งหมดกี่จำนวน นำความรู้เรื่องลำดับเรขาคณิตหาค่า n

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$

จะได้ $\frac{1}{256} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$8 = n - 1 \quad , \quad n = 9$$

จาก $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$

$$S_9 = \frac{1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right]}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1-\frac{1}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{511}{512}}{\frac{1}{2}} = \frac{511}{512} \times \frac{2}{1} = \frac{1022}{512} = 1\frac{255}{256}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของอนุกรมเรขาคณิต $2 + 4 + 8 + \dots + 2048$

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลบวกพจน์ทุกพจน์ของอนุกรมเรขาคณิต $243 + 81 + 27 + \dots + \frac{1}{27}$

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $2 + (-6) + (18) + (-54) + \dots$

.....

.....

.....

.....

.....





ตัวอย่างที่7 จงหาผลบวก 7 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $2 + (-6) + (18) + (-54) + \dots$

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่8 จงหาผลบวก 8 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $(-10) + (20) + (-40) + \dots$

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่9 จงหาผลบวก 9 พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $(-10) + (20) + (-40) + \dots$

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่10 จงหาผลบวก ทุก พจน์แรกของอนุกรมเรขาคณิต $16 + 4 + 1 + \dots + \frac{1}{1024}$

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่11 จงหาผลบวกของอนุกรม $4 + 4 \cdot 3^1 + 4 \cdot 3^2 + \dots + 4 \cdot 3^6$ (ตอบ 4372)

.....

.....

.....

ตัวอย่างที่12 ถ้า 3 และ $\frac{1}{27}$ เป็นพจน์ที่ 1 และ พจน์ที่ 5 ของลำดับเรขาคณิต จงหาผลบวกของทั้ง 5 พจน์

.....

.....

.....

