

จำนวนจริง



จำนวนจริง (Real numbers)

1. จำนวนจริง

มนุษย์รู้จักจำนวนมาตั้งแต่สมัยดึกดำบรรพ์ จำนวนชนิดแรกคือ จำนวนนับ และจำนวนได้มีการคิดขึ้นมาเพื่อตอบคำถามทางคณิตศาสตร์ ดังจะได้กล่าวจำนวนชนิดต่างๆ ดังนี้

1.1 จำนวนนับ

จำนวนนับ ได้แก่ 1, 2, 3, 4, ...

ใช้ แทนเซตของจำนวนนับ

ดังนั้น

1.2 จำนวนเต็ม

จำนวนเต็ม ได้แก่ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

ใช้ แทนเซตของจำนวนเต็ม

แบ่งจำนวนเต็มเป็น จำนวนเต็มลบ ศูนย์ และจำนวนเต็มบวก

ใช้ แทนเซตของจำนวนเต็มลบ

ใช้ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก

จะพบว่า จำนวนนับและจำนวนเต็มบวกเป็นจำนวนชนิดเดียวกัน ดังนั้น

1.3 จำนวนตรรกยะ

จำนวนตรรกยะคือ จำนวนที่สามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้ โดยที่เศษและส่วนเป็นจำนวนเต็มและส่วนไม่เท่ากับศูนย์

ใช้ Q แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$$Q = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ เมื่อ } a, b \in I \text{ และ } b \neq 0 \right\}$$

ตัวอย่างจำนวนตรรกยะ

1) จำนวนเต็มทุกจำนวน ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

2) ทศนิยม 0.5, $0.4\bar{3}$, 1.08

1.4 จำนวนอตรรกยะ

จำนวนอตรรกยะคือ จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนนับ

ใช้ Q' แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่างจำนวนอตรรกยะ

1) ทศนิยมที่ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนได้

เช่น 0.152814369..., 0.01011011101111...

2) π (เพราะ $\pi \approx \frac{22}{7}$)

3) จำนวนที่ติดลบบางชนิด

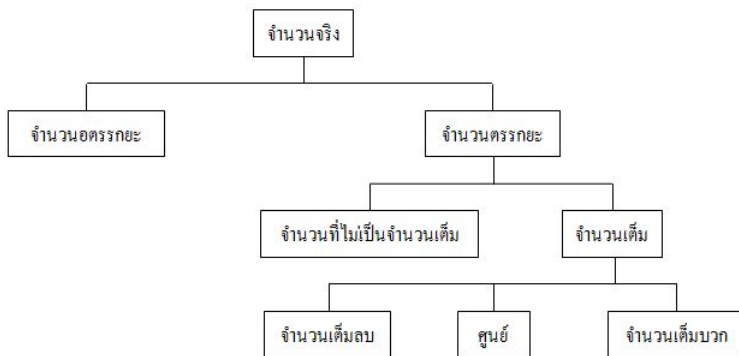
เช่น $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt{2}+4, \frac{2}{\sqrt{6}}$

1.5 จำนวนจริง

จำนวนจริงประกอบด้วยจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

ใช้ R แทนเซตของจำนวนจริง $R = Q \cup Q'$

จากจำนวนที่กล่าวทั้งหมดข้างต้น นำมาเขียนแผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่างๆ ได้ดังนี้



ตัวอย่าง $-3, 4, \sqrt{2}, 0.5, \sqrt{9}$ เป็นจำนวนชนิดใดบ้าง

แนวคิด

จำนวน	จำนวนเต็มบวก	จำนวนเต็มลบ	จำนวนเต็ม	จำนวนตรรกยะ	จำนวนอตรรกยะ	จำนวนจริง
-3		✓	✓	✓		✓
4	✓		✓	✓		✓
$\sqrt{2}$					✓	✓
0.5				✓		✓
$\sqrt{9}$	✓		✓	✓		✓

2. สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ

2.1 การเท่ากันในระบบจำนวนจริง



ในระบบจำนวนจริงมีสมบัติการเท่ากันดังนี้

กำหนด เป็นจำนวนจริง

(1) สมบัติการสะท้อน

$$a = a$$

เช่น $4 = 4$

(2) สมบัติการสมมาตร

ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$

เช่น $5 + 4 = 9$ แล้ว $9 = 5 + 4$

(3) สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

เช่น $10 - 2 = 8$ และ $8 = 2 + 6$ แล้ว $10 - 2 = 2 + 6$

(4) สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$

เช่น $6 = 2 + 4$ แล้ว $6 + 5 = (2 + 4) + 5$

(5) สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

เช่น $1 + 1 = 2$ แล้ว $(1 + 1) \times 3 = 2 \times 3$

2.2 การบวกและการคูณในระบบจำนวนจริง

การบวกในระบบจำนวนจริง

1. สมบัติปิดของการบวก

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + b$ เป็นจำนวนจริงด้วย

เช่น 2 และ 0.73 เป็นจำนวนจริง

$2 + 0.73 = 2.73$ เป็นจำนวนจริง

2. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริง แล้ว $(a + b) + c = a + (b + c)$

เช่น $(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$

3. สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง เรียกจำนวนที่บวกกับจำนวนจริงใดๆ แล้วได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงจำนวนนั้นว่า เอกลักษณ์การบวก

ถ้า a, x เป็นจำนวนจริง และ x เป็นเอกลักษณ์การบวกแล้ว

$$a + x = a$$

$$x = 0$$

หรือ $x + a = a$

$$x = 0$$

จะได้ $a + 0 = a = 0 + a$

จึงกล่าวได้ว่า 0 เป็นเอกลักษณ์การบวกเพียงจำนวนเดียวในระบบจำนวนจริง

(4) สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง อินเวอร์สการบวกของจำนวนจริง a ใดๆ หมายถึง จำนวนที่บวกกับ a แล้วเท่ากับ 0

ถ้า a และ x เป็นจำนวนจริงใดๆ และ x เป็นอินเวอร์สการบวกของ a แล้ว

$$\begin{aligned}
 x+a &= -a \\
 x+a+(-a) &= 0+(-a) \\
 x+0 &= -a \\
 x &= -a
 \end{aligned}$$

หรือ $a+x = 0$

$$\begin{aligned}
 a+(-a)+x &= 0+(-a) \\
 0+x &= -a \\
 x &= -a
 \end{aligned}$$

จะได้ $a+(-a) = 0 = (-a)+a$

จึงกล่าวได้ว่า $-a$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ a และ a เป็นอินเวอร์สการบวกของ $-a$
 นั่นคือ a และ $-a$ เป็นอินเวอร์สการบวกซึ่งกันและกัน

(5) สมบัติการสลับที่ของการบวก

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว $a+b = b+a$

เช่น $2+3 = 3+2$

การคูณในระบบจำนวนจริง

(1) สมบัติปิดของการคูณ

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว ab เป็นจำนวนจริงด้วย

เช่น 2 และ $\frac{1}{2}$ เป็นจำนวนจริง

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

เป็นจำนวนจริง

(2) สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ

ถ้า เป็นจำนวนจริง a, b, c แล้ว $(ab)c = a(bc)$

เช่น $(2 \times 3) \times 4 = 2 \times (3 \times 4)$

(3) สมบัติการมีเอกลักษณ์การคูณ

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง เรียกจำนวนที่คูณกับจำนวนจริงใดๆ แล้ว ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริงจำนวนนั้นว่า เอกลักษณ์การคูณ

ถ้า a, x เป็นจำนวนจริง และ 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณแล้ว

$$ax = a$$

$$x = 1$$

หรือ $xa = a$

$$x = 1$$

จะได้ $ax = a = xa$

จึงกล่าวได้ว่า 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณเพียงจำนวนเดียวในระบบจำนวนจริง

(4) สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ

บทนิยาม ในระบบจำนวนจริง อินเวอร์สการคูณของจำนวนจริง a ใดๆ หมายถึง จำนวนที่คูณกับ a แล้ว เท่ากับ 1

นั่นคือ $a \neq 0$

ถ้า a, x เป็นจำนวนจริงใดๆ และ x เป็นอินเวอร์สการคูณของ a แล้ว

$$\begin{aligned}
 ax &= 1 \\
 \frac{1}{a}(a)x &= \frac{1}{a}(1) \\
 (1)x &= \frac{1}{a} \\
 x &= \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned}
 xa &= 1 \\
 xa\left(\frac{1}{a}\right) &= 1\left(\frac{1}{a}\right) \\
 x(1) &= \frac{1}{a} \\
 x &= \frac{1}{a}
 \end{aligned}$$

จะได้ $a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)a$

จึงกล่าวได้ว่า $\frac{1}{a}$ เป็นอินเวอร์สการคูณของ a และ a เป็นอินเวอร์สการคูณของ $\frac{1}{a}$

นั่นคือ a และ $\frac{1}{a}$ เป็นอินเวอร์สการคูณซึ่งกันและกัน

เช่น 2 มี $\frac{1}{2}$ เป็นอินเวอร์สการคูณ

$\frac{3}{5}$ มี $\frac{5}{3}$ เป็นอินเวอร์สการคูณ

ข้อสังเกต $\frac{a}{b}$ มี $\frac{b}{a}$ เป็นอินเวอร์สการคูณเมื่อ $a, b \neq 0$

(5) สมบัติการสลับที่ของการคูณ

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $ab = ba$

เช่น $3 \times 4 = 4 \times 3$

นอกจากนี้ในระบบจำนวนจริง ยังมีสมบัติที่เกี่ยวกับการบวกและการคูณ ได้แก่ สมบัติการกระจาย

(6) สมบัติการกระจาย

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว

$$a(b+c) = ab+ac$$

และ $(b+c)a = ba+ca$

เช่น 1) $4 \times (2+3) = (4 \times 2) + (4 \times 3)$

2) $(5+2) \times 3 = (5 \times 3) + (2 \times 3)$

ตัวอย่างที่ 1 พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงตามสมบัติของจำนวนจริงข้อใด

- 1) ถ้า a เป็นจำนวนจริง แล้ว $3 \cdot a = a \cdot 3$
- 2) a และ $\sqrt{b}$ เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + \sqrt{b}$ เป็นจำนวนจริง
- 3) ถ้า a เป็นจำนวนจริง แล้ว $10a$ เป็นจำนวนจริง
- 4) ถ้า a เป็นจำนวนจริง แล้วมีจำนวนจริงที่คูณกับ a เท่ากับ 1

แนวคิด

- 1) a เป็นจำนวนจริง $3 \cdot a = a \cdot 3$ (สมบัติการสลับที่ของการคูณ)
- 2) $a, \sqrt{b}$ เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + \sqrt{b}$ เป็นจำนวนจริง (สมบัติปิดการบวกของจำนวนจริง)
- 3) ถ้า a เป็นจำนวนจริง แล้ว $10a$ เป็นจำนวนจริง (สมบัติปิดการคูณของจำนวนจริง)
- 4) ถ้า a เป็นจำนวนจริง แล้ว มีจำนวนจริงที่คูณกับ a เท่ากับ 1 (สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณ)

3. การนำสมบัติของจำนวนจริงไปใช้ในการแก้สมการกำลังสอง

3.1 การแยกตัวประกอบของพหุนาม

การแยกตัวประกอบของพหุนามคือ การเขียนพหุนามในรูปผลคูณของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่า เช่น

$$2x^2 + 4x = 2x(x+2)$$

การแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้สมบัติการแจกแจงและการเปลี่ยนหมู่

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 5 &= x^2 + (x + 5x) + 5 \\&= (x^2 + x) + (5x + 5) \\&= x(x+1) + 5(x+1) \\&= (x+1)(x+5)\end{aligned}$$

จากตัวอย่างอาจกล่าวได้ว่า การแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 + ax + b$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงที่ $b \neq 0$ ทำได้โดยการหาจำนวน m และ n ที่ $m+n=a$ และ $mn=b$ จะได้ $x^2 + ax + b = (x+m)(x+n)$

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 13x + 30$

$$\begin{aligned}x^2 + 13x + 30 &= (x+m)(x+n) \\m+n &= 13 \quad \text{และ} \quad mn = 30\end{aligned}$$

m	1	2	3
n	12	11	10
mn	12	22	30

} $m+n=13$

วิธีทำ ให้

แสดงว่า $m=3$ และ $n=10$

ดังนั้น $x^2 + 13x + 30 = (x+3)(x+10)$

จากตัวอย่าง เมื่อนักเรียนแยกตัวประกอบหาค่า m และ n ได้คล่องแล้ว นักเรียนอาจจะตารางและเขียนผลการแยกตัวประกอบของพหุนามได้ทันที ดังนี้

$$\begin{aligned}x^2 + 13x + 30 &= (x+3)(x+10) \\x^2 + x - 12 &= (x+4)(x-3)\end{aligned}$$

การแยกตัวประกอบในรูปผลต่างกำลังสอง

ตัวอย่างที่ 5 จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 - 9$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^2 - 9 &= x^2 - (0)x - 9 \\ \text{ให้ } x^2 + (0)x - 9 &= (x+m)(x+n) \\ m+n &= 0 \quad \text{และ} \quad mn = -9\end{aligned}$$

จะได้ $m=3$ และ $n=-3$

หรือ $m=-3$ และ $n=3$

แสดงว่า $x^2 + (0)x - 9 = (x-3)(x+3)$

หรือ $x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x-3)(x+3)$

กล่าวได้ว่า $x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$

เราเรียก $x^2 - a^2$ ว่า พหุนามในรูปผลต่างกำลังสอง

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบของพหุนามในแต่ละข้อ

(1) $x^2 - 5^2$

(2) $x^2 - 16$

(3) $(x+1)^2 - 3^2$

(4) $(x+1)^2 - (x-2)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(1) \quad x^2 - 5^2 &= (x-5)(x+5) \\(2) \quad x^2 - 16 &= x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4) \\(3) \quad (x+1)^2 - 3^2 &= (x+1-3)(x+1+3) = (x-2)(x+4) \\(4) \quad (x+1)^2 - (x-2)^2 &= ((x+1)-(x-2))((x+1)+(x-2)) \\&= (3)(2x-1)\end{aligned}$$

การแยกตัวประกอบโดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

ในกรณีที่เราไม่สามารถแยกตัวประกอบพหุนามในรูป $x^2 + ax + b = (x+m)(x+n)$ ได้โดยง่าย เรามีวิธีการที่ช่วยในการแยกตัวประกอบได้ เรียกว่า การแยกตัวประกอบโดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ดังนี้

ตัวอย่างกำลังสองสมบูรณ์

$$(x+1)^2, (x-2)^2, (x+5)^2$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}(x+5)^2 &= (x+5)(x+5) \\&= x^2 + 2(5)x + 5^2\end{aligned}$$

จาก $(x+5)^2$ ถ้าเรียก ว่า ตัวหน้า เรียก 5 ว่า ตัวหลัง

$$(\text{ตัวหน้า} + \text{ตัวหลัง})^2 = (\text{ตัวหน้า})^2 + 2(\text{ตัวหน้า})(\text{ตัวหลัง}) + (\text{ตัวหลัง})^2$$

$$\text{หรือเขียนย่อ ว่า (หน้า + หลัง)}^2 = (\text{หน้า})^2 + 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2$$

$$\text{เช่น } (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

ในทางกลับกันเราได้ว่า $x^2 + 2ax + a^2$ เขียนอยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้เป็น $(x+a)^2$

ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนพหุนามที่กำหนดให้ในรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$(1) \quad x^2 + 2(4)x + 4^2$$

$$(2) \quad x^2 + 10x + 5^2$$

$$(3) \quad x^2 - 14x + 49$$

วิธีทำ

$$(1) \quad x^2 + 2(4)x + 4^2 = (x+4)^2$$

$$\begin{aligned}(2) \quad x^2 + 10x + 5^2 &= x^2 + 2(5)x + 5^2 \\&= (x+5)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad x^2 - 14x + 49 &= x^2 - 2(7)x + 7^2 \\&= (x-7)^2\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่า a ของพหุนามในแต่ละข้อที่สามารถทำพหุนามนั้นในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้

$$(1) \quad x^2 + 8x + a$$

$$(2) \quad x^2 - 12x + a$$

$$(3) \quad x^2 + 2x + a$$

$$(4) \quad x^2 - x + a$$

วิธีทำ

$$(1) \quad x^2 + 8x + a = x^2 + 2(4)x + a$$

$x^2 + 2(4)x + a$ เขียนเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้เมื่อ

$$x^2 + 2(4)x + a = x^2 + 2(4)x + 4^2 \quad \text{แสดงว่า } a = 4^2$$

$$(2) \quad x^2 - 12x + a = x^2 - 2(6)x + a^2$$

$x^2 - 2(6)x + a$ เขียนเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้เมื่อ

$$x^2 - 2(6)x + a = x^2 - 2(6)x + 6^2 \quad \text{แสดงว่า } a = 6^2$$

$$(3) \quad x^2 + 2x + a = x^2 + 2(1)x + a$$

$x^2 + 2(1)x + a$ เขียนเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้เมื่อ

$$x^2 + 2(1)x + a = x^2 + 2(1)x + 1^2 \quad \text{แสดงว่า } a = 1^2 = 1$$

$$(4) \quad x^2 - x + a = x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + a$$

$x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + a$ เขียนเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้เมื่อ

$$x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + a = x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \text{แสดงว่า } a = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

การหาค่า a นอกจากนักเรียนหาได้ดังตัวอย่าง นักเรียนอาจหาค่า a ได้ดังนี้

$$x^2 + 6x + a = x^2 + 2(3)x + a$$

$$\downarrow$$

$$a = 3^2$$

กล่าวได้ว่า $x^2 + ax + b$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้เมื่อ $b = \left(\frac{a}{2}\right)^2$

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^2 - 2x - 4$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 4 &= (x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) - 4 \\ &= (x^2 - 2x + 1^2) - 1^2 - 4 \\ &= (x^2 - 1^2) - 5 \\ &= (x-1)^2 - (\sqrt{5})^2 \\ &= (x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5}) \end{aligned}$$

3.2 การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียว

การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวคือ การหาคำตอบของสมการที่เขียนอยู่ในรูป $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัว และ $a \neq 0$

การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยการแยกตัวประกอบ

ขั้นตอน

(1) แยกตัวประกอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ} \quad ax^2 + bx + c &= 0 \\ \text{สมมติ} \quad ax^2 + bx + c &= (x+m)(x+n) \\ \text{จะได้} \quad (x+m)(x+n) &= 0 \end{aligned}$$

(2) ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริงที่ว่า

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง และ $ab = 0$

แล้ว a หรือ b อย่างน้อยหนึ่งตัวต้องเป็นศูนย์

จากข้อ (1) จะได้ $x+m=0$ หรือ $x+n=0$

ตัวอย่างที่ 10 จงแก้สมการ $x^2 + 5x - 24 = 0$

วิธีทำ

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$(x+8)(x-3) = 0$$

$$x+8 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x-3 = 0$$

$$x = -8, 3$$

ตัวอย่างที่ 11 จงแก้สมการของ $x^2 - 4x - 6 = 0$

วิธีทำ

$$x^2 - 4x - 6 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 6 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 6 = 0$$

$$(x-2)^2 - 10 = 0$$

$$(x-2)^2 - (\sqrt{10})^2 = 0$$

$$(x-2-\sqrt{10})(x-2+\sqrt{10}) = 0$$

$$x-2-\sqrt{10} = 0 \quad \text{หรือ} \quad x-2+\sqrt{10} = 0$$

$$x = 2+\sqrt{10}, \quad 2-\sqrt{10}$$

การแก้สมการกำลังสองตัวแปรเดียวโดยการใช้สูตร

จากสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a \neq 0$

จะได้

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ตัวอย่างที่ 12 จงแก้สมการในแต่ละข้อ

(1) $x^2 - 2x - 4 = 0$

(2) $x^2 - 10x + 25 = 0$

(3) $x^2 + x + 5 = 0$

วิธีทำ (1) $x^2 - 2x - 4 = 0$

เทียบกับ $ax^2 + bx + c = 0$

จะได้ $a=1, b=-2, c=-4$

จากสูตร
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

คำตอบของสมการ $x^2 - 2x - 4 = 0$ คือ

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

แสดงว่า $x = 1 + \sqrt{5}, 1 - \sqrt{5}$

(2) $x^2 - 10x + 25 = 0$

เทียบกับ $ax^2 + bx + c = 0$

จะได้ $a=1, b=-10, c=25$

จากสูตร
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

คำตอบของสมการ $x^2 - 10x + 25 = 0$ คือ

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(25)}}{2(1)} \\ &= \frac{10 \pm \sqrt{100-100}}{2} \\ &= \frac{10 \pm 0}{2} \\ &= 5 \end{aligned}$$

(3) $x^2 + x + 5 = 0$

เทียบกับ $ax^2 + bx + c = 0$

จะได้ $a=1, b=1, c=5$

จากสูตร
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(5)}}{2(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-20}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sqrt{-19}$ ไม่เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $x^2 + x + 5 = 0$ ไม่มีคำตอบในระบบจำนวนจริง

ข้อสังเกต

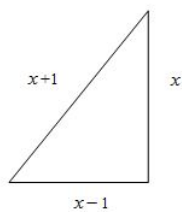
จาก $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- 1) ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ คำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริงมี 2 คำตอบ
- 2) ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ คำตอบของสมการที่เป็นจำนวนจริง 2 คำตอบที่มีค่าเท่ากัน
- 3) ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง
- 4) ถ้า x_1, x_2 เป็นคำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

จะได้ $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ และ $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

ตัวอย่างที่ 13 จงหาความยาวเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้



วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จะได้

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= (x-1)^2 + x^2 \\ x^2 + 2x + 1 &= x^2 - 2x + 1 + x^2 \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0 \\ x &= 0, 4 \quad (\text{ใช้ค่าบวก})\end{aligned}$$

เส้นรอบรูปสามเหลี่ยมยาว $(x+1) + x + (x-1) = 5 + 4 + 3$

$= 12$ หน่วย

3.3 การไม่เท่ากัน

ถ้า a และ b เป็นจำนวนสองจำนวน เมื่อนำมาเปรียบเทียบกันเพื่อต้องการทราบว่าเท่ากันหรือไม่เท่ากันแล้ว

เราใช้สัญลักษณ์ $\neq$ แทนไม่เท่ากัน

เช่น $4 \neq 3$ อ่านว่า สี่ไม่เท่ากับสาม

นอกจากเปรียบเทียบว่าจำนวนไม่เท่ากันแล้ว เรายังบอกได้ว่าจำนวนใดมากกว่าหรือจำนวนใดน้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่งโดยใช้สัญลักษณ์

$>$ แทน “มากกว่า” เช่น $5 > 2$

$\geq$ แทน “มากกว่าหรือเท่ากับ” เช่น $6 \geq 3$

$<$ แทน “น้อยกว่า” เช่น $1 < 6$

$\leq$ แทน “น้อยกว่าหรือเท่ากับ” เช่น $0 \leq 2$

เราเรียกประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมาย $>, \geq, <, \leq, \neq$ ว่า “อสมการ”

สมบัติของการไม่เท่ากัน

กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1) สมบัติการถ่ายทอด

ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$

เช่น ถ้า $10 > 6$ และ $6 > 3$ แล้ว $10 > 3$

2) สมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

ถ้า a, b แล้ว $a + c > b + c$

เช่น ถ้า $9 > 2$ แล้ว $9 + 5 > 2 + 5$

3) สมบัติการคูณด้วยจำนวนที่เท่ากันที่ไม่เท่ากับศูนย์

(3.1) ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac > bc$

เช่น $a = 4, b = 2$ และ $c = 3$

ถ้า $4 > 2$ แล้ว $4(3) > 2(3)$

(3.2) ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac < bc$

เช่น $a=4$, $b=2$ และ $c=3$

ถ้า $4 > 2$ แล้ว $4(-3) < 2(-3)$

4) สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก

ถ้า $a+c > b+c$ แล้ว $a > b$

เช่น $5+2 > 3+2$ แล้ว $5 > 3$

5) สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ

(5.1) ถ้า $ac > bc$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$

เช่น $a=5$, $b=2$ และ $c=4$

ถ้า $5(4) > 2(4)$ แล้ว $5 > 2$

(5.2) ถ้า $ac > bc$ และ $c < 0$ แล้ว $a < b$

เช่น $a=2$, $b=5$ และ $c=-3$

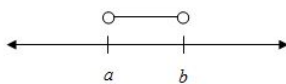
ถ้า $2(-3) > 5(-3)$ แล้ว $2 < 5$

3.4 ช่วง

บทนิยาม เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง และ $a < b$

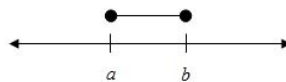
ช่วงเปิด (a,b) หมายถึง $\{x | a < x < b\}$

แสดงช่วงเปิด (a,b) บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



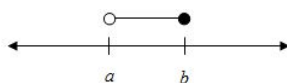
ช่วงปิด $[a,b]$ หมายถึง $\{x | a \leq x \leq b\}$

แสดงช่วงปิด $[a,b]$ บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



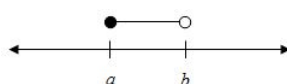
ช่วงครึ่งเปิด $(a,b]$ หมายถึง $\{x | a < x \leq b\}$

แสดงช่วงครึ่งเปิด $(a,b]$ บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



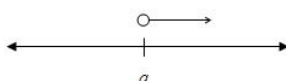
ช่วงครึ่งเปิด $[a,b)$ หมายถึง $\{x | a \leq x < b\}$

แสดงช่วงครึ่งเปิด $[a,b)$ บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



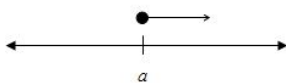
ช่วง (a,∞) หมายถึง $\{x | x > a\}$

แสดงช่วง (a,∞) บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



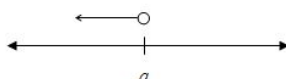
ช่วง $[a, \infty)$ หมายถึง $\{x | x \geq a\}$

แสดงช่วง $[a, \infty)$ บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



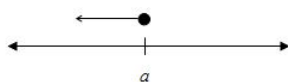
ช่วง $(-\infty, a)$ หมายถึง $\{x | x < a\}$

แสดงช่วง $(-\infty, a)$ บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



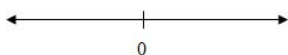
ช่วง $(-\infty, a]$ หมายถึง $\{x | x \leq a\}$

แสดงช่วง $(-\infty, a]$ บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ช่วง $(-\infty, \infty)$ หมายถึง $\{x | x \in R\}$

แสดงช่วง $(-\infty, \infty)$ บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



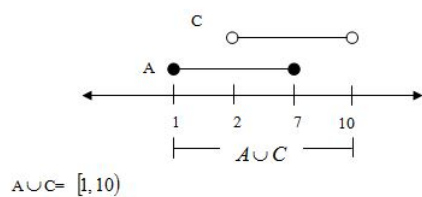
ตัวอย่างที่ 14 กำหนด $A = [1, 7]$, $B = [-3, 6]$ และ $C = (2, 10)$

จงหาช่วงในแต่ละข้อ

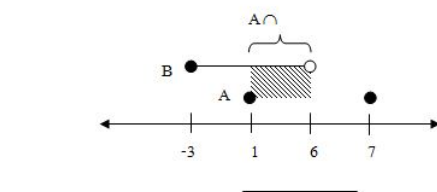
- | | |
|----------------|-----------------|
| (1) $A \cup C$ | (2) $A \cap B$ |
| (3) $B - C$ | (4) $A' \cap B$ |

วิธีทำ

(1)

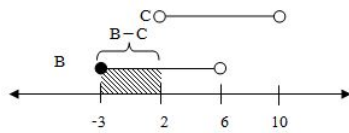


(2)



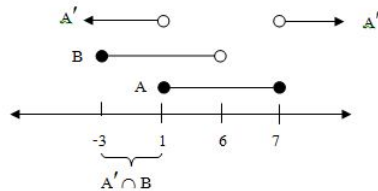
$A \cap B = [1, 6)$

(3)



$$B-C = [-3, 2]$$

(4)



$$A' \cap B = [-3, 1)$$

3.5 อสมการ

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่าอสมการหมายถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมาย $>$, $\geq$, $<$, $\leq$, $\neq$ ในประโยค

การหาคำตอบของอสมการคือ การหาค่าจำนวนจริงที่แทนตัวแปรในอสมการแล้วทำให้อสมการเป็นจริง

การหาคำตอบของอสมการเรียกว่า การแก้สมการ ทำได้โดยการใช้สมบัติของการไม่เท่ากันมาหาคำตอบดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 15 จงแก้สมการในแต่ละข้อและแสดงคำตอบของอสมการโดยใช้เส้นจำนวน

(1) $x-1 > 0$

(2) $x-4 \geq 1$

(3) $6x < 5$

(4) $3x-2 \leq 4$

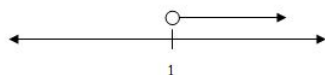
วิธีทำ

(1) $x-1 > 0$

$$x-1+1 > 0+1$$

$$x > 1$$

แสดงคำตอบของอสมการโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



(2) $x-4 \geq 1$

$$x-4+4 \geq 1+4$$

$$x \geq 5$$

แสดงคำตอบของอสมการโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้

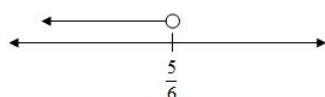


(3) $6x < 5$

$$\left(\frac{1}{6}\right)(6x) < \left(\frac{1}{6}\right)(5)$$

$$x < \frac{5}{6}$$

แสดงคำตอบของอสมการโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



$$(4) \quad 3x - 2 \leq 4$$

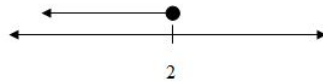
$$3x - 2 + 2 \leq 4 + 2$$

$$3x \leq 6$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)(3x) \leq \left(\frac{1}{3}\right)(6)$$

$$x \leq 2$$

แสดงคำตอบของสมการโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 16 จงแก้สมการ $-1 \leq 2x + 1 < 7$ และแสดงคำตอบของสมการโดยใช้เส้นจำนวน

วิธีทำ

$$-1 \leq 2x + 1 < 7$$

ใช้ (-1) บวกตลอดทั้งสมการ

$$-1 + (-1) \leq 2x + 1 + (-1) < 7 + (-1)$$

$$-2 \leq 2x < 6$$

ใช้ $\frac{1}{2}$ คูณตลอดทั้งสมการ

$$\frac{1}{2} \times (-2) \leq \frac{1}{2} \times (2x) < \frac{1}{2} \times (6)$$

$$-1 \leq x < 3$$

แสดงคำตอบของสมการโดยใช้เส้นจำนวนได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 17 จงแก้สมการ $x^2 - 4x + 3 < 0$

วิธีทำ

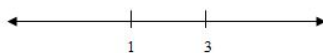
จาก $x^2 - 4x + 3 < 0$

$$(x-3)(x-1) < 0$$

พิจารณาค่า x จากสมการ $(x-3)(x-1) = 0$

$$x = 1, 3$$

แบ่งเส้นจำนวนตำแหน่ง $x = 1, 3$ ได้ดังนี้



พิจารณาค่าของ $(x-3)(x-1)$ โดยเลือกแทน x ด้วยจำนวนจริงในช่วง $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ และ $(3, \infty)$ ดังแสดงในตาราง

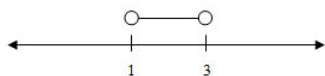
ช่วง	เลือกจำนวนจริงแทนค่า x	$(x-1)(x-3)$	ค่าของ $(x-1)(x-3)$
$(-\infty, 1)$	-3	$(-4)(-6) = 24$	มีค่าเป็นบวก
$(1, 3)$	2	$(1)(-1) = -1$	มีค่าเป็นลบ
$(3, \infty)$	4	$(3)(1) = 3$	มีค่าเป็นบวก

จากตาราง ช่วง $(-\infty, 1)$ จะได้ $(x-1)(x-3) > 0$

ช่วง $(1, 3)$ จะได้ $(x-1)(x-3) < 0$

ช่วง $(3, \infty)$ จะได้ $(x-1)(x-3) > 0$

แสดงคำตอบของ $(x-3)(x-1) < 0$ บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 18 จงแก้สมการ $x^2 + 2x > 3$

วิธีทำ จาก

$$x^2 + 2x > 3$$

$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$(x+3)(x-1) > 0$$

พิจารณาค่า x จากสมการ $(x+3)(x-1) = 0$

$$x = -3, 1$$

แบ่งเส้นจำนวนตำแหน่ง $x = -3, 1$ ได้ดังนี้



พิจารณาค่าของ $(x+3)(x-1)$ โดยเลือกแทน x ด้วยจำนวนจริงในช่วง $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ และ $(1, \infty)$ ดังแสดงในตาราง

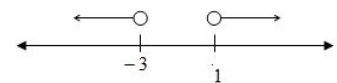
ช่วง	เลือกจำนวนจริงแทนค่า x	$(x+3)(x-1)$	ค่าของ $(x+3)(x-1)$
$(-\infty, -3)$	-4	$(-1)(-5) = 5$	มีค่าเป็นบวก
$(-3, 1)$	0	$(3)(-1) = -3$	มีค่าเป็นลบ
$(1, \infty)$	2	$(5)(1) = 5$	มีค่าเป็นบวก

จากตาราง ช่วง $(-\infty, -3)$ จะได้ $(x+3)(x-1) > 0$

ช่วง $(-3, 1)$ จะได้ $(x+3)(x-1) < 0$

ช่วง $(1, \infty)$ จะได้ $(x+3)(x-1) > 0$

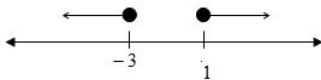
แสดงคำตอบของ $(x+3)(x-1) > 0$ บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 19 จงแก้สมการ $x^2 + 2x \geq 3$

วิธีทำ สำหรับการแก้สมการ $x^2 + 2x \geq 3$ คิดทำนองเดียวกับการแก้สมการ $x^2 + 2x > 3$ แต่ต้องรวมคำตอบของ $x^2 + 2x > 3$ ด้วย ซึ่ง $x = -3, 1$ เป็นคำตอบของ $x^2 + 2x > 3$ ซึ่งแสดงคำตอบของสมการ $x^2 + 2x \geq 3$

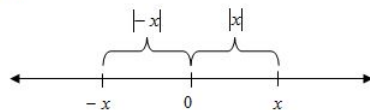
บนเส้นจำนวนได้ดังนี้



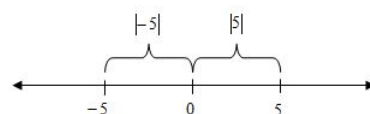
3.6 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ระยะจากจุดที่แทน 0 ถึงจุดที่แทนจำนวนจริง x เรียกว่า ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง x

ใช้ $|x|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ x



พิจารณา



$|-5|$ หมายถึง ระยะจาก 0 ถึง -5

แสดงว่า $|-5| = 5$

$|5|$ หมายถึง ระยะจาก 0 ถึง 5

แสดงว่า $|5| = 5$

ทำนองเดียวกัน $|0| = 0$

จึงกล่าวได้ว่า ถ้า $x > 0$ แล้ว $|x| = x$

ถ้า $x < 0$ แล้ว $|x| = -x$

และ ถ้า $x = 0$ แล้ว $|x| = 0$

ตัวอย่างที่ 20 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

$$(1) |-4|+|3|$$

$$(2) |12|-|-3|$$

วิธีทำ (1) $|-4|+|3| = 4+3$
 $= 7$

$$(2) |12|-|-3| = 12-3$$

$$= 9$$

ทฤษฎีบท

กำหนด a และ b เป็นจำนวนจริง

$$1) |x| = |-x|$$

เช่น $|4| = 4$ และ $|-4| = 4$

แสดงว่า $|4| = |-4|$

ดังนั้น $|x| = |-x|$

$$2) |xy| = |x||y|$$

เช่น $|4 \times 3| = |4| \times |3|$

$$|4||3| = 4 \times 3 = 12$$

$$|4 \times 3| = |12| = 12$$

แสดงว่า $|4 \times 3| = |4| \times |3|$

ดังนั้น $|xy| = |x||y|$

$$3) \frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$$

เช่น $\frac{|10|}{|2|} = \frac{|10|}{|2|}$

$$\frac{|10|}{|2|} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\frac{|10|}{|2|} = |5| = 5$$

แสดงว่า $\frac{|10|}{|2|} = \frac{|10|}{|2|}$

ดังนั้น $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$

$$4) |x^2| = |x|^2 = x^2$$

เช่น $|3^2| = |9| = 9$

$$|3|^2 = 3^2 = 9$$

$$|3^2| = 9$$

แสดงว่า $|3^2| = |3|^2 = 3^2$

ดังนั้น $|x^2| = |x|^2 = x^2$

$$5) |x| = |y| \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = y \text{ หรือ } x = -y$$

เช่น $x = 3, y = 3$

จะได้ $|x| = |y|$ เมื่อ $x = y$

หรือ $x = 3, y = -3$

จะได้ $|x| = |y|$ เมื่อ $x = -y$

ดังนั้น $|x| = |y|$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ หรือ $x = -y$

$$6) |x-y| = |y-x|$$

เช่น $|4-1| = |3| = 3$

$$|1-4| = |-3| = 3$$

แสดงว่า $|4-1| = |1-4|$

ดังนั้น $|x-y| = |y-x|$

สมการค่าสัมบูรณ์คือ สมการที่ตัวแปรติดอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์คือ การหาจำนวนจริงที่แทนตัวแปรในสมการค่าสัมบูรณ์แล้วทำให้สมการค่าสัมบูรณ์เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 21 จงหาคำตอบของสมการ $|x-3|=5$

วิธีทำ จาก $|x-3|=5$

แสดงว่า $x-3=5$ หรือ $x-3=-5$

$$x=8 \text{ หรือ } x=-2$$

ตัวอย่างที่ 22 กำหนด $|x-y|=4$ และ $|x^2-y^2|=20$

จงหาค่า $x+y$ เมื่อ $x+y > 0$

วิธีทำ

$$|x^2-y^2|=20$$

$$|(x-y)(x+y)|=20$$

$$|x-y||x+y|=20$$

$$4|x+y|=20$$

$$|x+y|=\frac{20}{4}=5$$

$$|x+y|=5$$

$$x+y=\pm 5$$

เนื่องจาก $x+y > 0$

ดังนั้น $x+y=5$

อสมการค่าสัมบูรณ์

อสมการค่าสัมบูรณ์คือ อสมการที่ตัวแปรอยู่ในรูปค่าสัมบูรณ์

การแก้สมการค่าสัมบูรณ์คือ การหาจำนวนจริงแทนตัวแปรในอสมการค่าสัมบูรณ์แล้วทำให้อสมการค่าสัมบูรณ์เป็นจริง

ทฤษฎีบทกำหนด เป็นจำนวนจริง x และ a เป็นจำนวนจริงบวก

- 1) $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$
- 2) $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
- 3) $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x < -a$ หรือ $x > a$
- 4) $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

ตัวอย่างที่ 23 จงแก้สมการ $|x-1| < 2$

วิธีทำ $|x-1| < 2$ ก็ต่อเมื่อ $-2 < x-1 < 2$

ใช้ 1 บวกทั้งอสมการ

$$-2+1 < x-1+1 < 2+1$$

$$-1 < x < 3$$

ตัวอย่างที่ 24 จงแก้สมการ $|2x+3| \geq 5$

วิธีทำ $|2x+3| \geq 5$ ก็ต่อเมื่อ $2x+3 \leq -5$ หรือ $2x+3 \geq 5$

ใช้ -3 บวกทั้งอสมการทั้งสองอสมการ

จะได้ $2x+3+(-3) \leq -5+(-3)$ หรือ $2x+3+(-3) \geq 5+(-3)$

$$2x \leq -8 \quad \text{หรือ} \quad 2x \geq 2$$

ใช้ $\frac{1}{2}$ คูณทั้งอสมการทั้งสองอสมการ

$$\frac{1}{2} \times 2x \leq \frac{1}{2} \times (-8) \quad \text{หรือ} \quad \frac{1}{2} \times 2x \geq \frac{1}{2} \times 2$$

$$x \leq -4 \quad \text{หรือ} \quad x \geq 1$$



จำนวนจริง



แหล่งข้อมูลวิดีโอเพิ่มเติม

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-035971/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-035973/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-035975/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-035976/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-035979/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-035979/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-036070/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-036071/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-036072/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-036073/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-036074/

http://www.trueplookpanya.com/new/cms_detail/knowledge/23957-036075/