ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น

Introduction to Number Theory

รายวิชา ค30204 คณิตศาสตร์พิเศษ2

ชื่อ... ชั้น ม.5/1 เลขที่.........

โดยครู เณริศา พรหมวิลัย

โรงเรียนสตรีภูเก็ต

===

การหารลงตัว

1. การหารลงตัว

บทนิยาม

จำนวนเต็ม n ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์จะหารจำนวนเต็ม m ลงตัวก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $m = nc$

ใช้ $n|m$ แทน "n หาร m ลงตัว" เช่น $4|8$

ใช้ $n \nmid m$ แทน "n หาร m **ไม่**ลงตัว" เช่น $4 \nmid 6$

ตัวอย่าง

1. $2|8$ เพราะ มีจำนวนเต็ม 4 ที่ทำให้ $8 = 2 \cdot 4$
2. $3|21$ ....
3. $-4|12$ ....
4. $5|-20$ ....
5. $4|0$ ....
6. $3 \nmid 8$ เพราะ **ไม่**มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $8 = 3 \cdot c$
7. $2 \nmid 99$ ....
8. $5 \nmid -16$ ....

ทฤษฎีบทที่ 1

กำหนด a เป็นจำนวนเต็ม และ $a \neq 0$

(1) $a|0$ (2) $1|a$ (3) $a|a$

พิสูจน์ (1) $a|0$ เพราะ มีจำนวนเต็ม 0 ที่ทำให้ $0 = a \cdot 0$

(2) $1|a$ ....

(3) $a|a$ ....

ทฤษฎีบทที่ 2

ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัด

1. ให้ $a|b$ และ $c|d$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $ac|bd$

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.ให้ $a|b$ และ $b|d$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $a|(c-b)$

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบทที่ 3

ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a|b$ จะได้ $a \le b$

เช่น 3 และ 9 เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $3|9$ จะได้ $3 \le 9$

พิสูจน์ สมมติ $a|b$

จะได้ว่า มีจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ $b = ac$

เนื่องจาก a,b เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า c เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $c \ge 1$

จาก $b = ac$

จะได้ $b \ge a$

ทฤษฎีบทที่ 4

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a|b$ และ $a|c$ จะได้ $a|(bx+cy)$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

เช่น 4, 8 และ 12 เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $4|8$ และ $4|12$ จะได้ $4|(8\cdot 2+12\cdot 3)$

จำนวนเต็มใดก็ได้

พิสูจน์

$a|b$ ดังนั้นมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $b = an$

$a|c$ ดั้งนั้นมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $c = am$

ดั้งนั้น bx =..

และ cy = ...

เพราะฉะนั้น $bx + cy$ = ...

=..

เนื่องจาก n,x,m และ y เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $nx+my$ เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ $a|(bx+cy)$

แบบฝึกหัด

1. จงยกตัวอย่างจำนวนเต็ม a, b, c ซึ่ง $a|bc$ แต่ $a \nmid b$ และ $a \nmid c$

....

....

....

....

2. จริงหรือไม่ถ้า $a|(b+c)$ แล้ว $a|b$ หรือ $a|c$ (ยกตัวอย่างประกอบ)

....

....

....

3. ถ้า d เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $d|(15k+27)$ และ $d|(3k+2)$ จงหาค่าของ d (ใช้ ทบ.4)

....

....

....

....

....

....

....

....

4. จงแสดงว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว $4|n^2-1$

....

....

....

....

....

....

....

....

5. จงแสดงว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว $2|(a^2 - a)$

วิธีทำ แยกพิจารณา a เป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 ให้ a เป็นจำนวนคู่

....

....

....

....

....

....

กรณีที่ 2 ให้ a เป็นจำนวนคี่

....

....

....

....

....

....

....

....

6. ถ้า $a|(2p-3q)$ และ $a|(4p-5q)$ จงแสดงว่า $a|q$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวหารร่วมมาก

บทนิยาม

กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์ (อย่างน้อยที่สุดจำนวนใดจำนวนหนึ่งต้องไม่เป็นศูนย์) แล้ว จะกล่าวว่า $d \in I^+$ เป็นตัวหารร่วมมาก (Greatest Common Divisor : GCD) ของจำนวนเต็ม a,b ก็ต่อเมื่อ d เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่ทำให้ $d|a$ และ $d|b$

หมายเหตุ
1. ห.ร.ม. เป็นจำนวนเต็มบวกและไม่เป็นศูนย์
2. ใช้สัญลักษณ์ $d = (a,b)$ เพื่อแสดงว่า d เป็น ห.ร.ม.ของ a และ b
3. $(a,b) = (-a,b) = (a,-b) = (-a,-b)$ นั่นคือไม่ว่าเราจะหา ห.ร.ม.ของจำนวนเต็มบวกหรือลบย่อมมีค่าเท่ากัน
4. ถ้า a ไม่เป็นศูนย์แล้ว $(a,0) = |a|$ นั่นคือ ห.ร.ม.ของจำนวนเต็มใด ๆ กับศูนย์ก็คือตัวมันเองที่เป็นบวกนั่นเอง

ตัวอย่าง1. จงหา ห.ร.ม. ของ 32 กับ 48

1. ใช้วิธีพิจารณาตัวประกอบ

....

....

....

....

2. ใช้วิธีแยกตัวประกอบ

....

....

....

....

....

3. ใช้วิธีหารสั้น

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2 จงหา ห.ร.ม.ของ 63 และ -42

(63,42) = (63,-42)

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3 จงหา ห.ร.ม. ของ 96, 144 และ 240

....

....

....

....

....

....

ขั้นวิธีการหาร

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม $n \neq 0$ จะมีจำนวนเต็ม q และ r ชุดเดียว ซึ่ง

m = nq + r โดย $o \leq r < |n|$ เรียก q ว่าผลหาร และ เรียก r ว่าเศษ

เช่น 5 หาร -28 จะได้ -28 = (5)(-6) +2 เรียก -6 ว่า ผลหาร และเรียก 2 ว่า เศษ

ตัวอย่าง ในตารางต่อไปนี้ จะแสงผลหาร (q) และเศษ ® จากการหารจำนวนเต็ม m ด้วยจำนวนเต็ม n

m	n	q (ผลหาร)	nq	r (เศษ)	m = nq + r
98	7	14	98	0	$98 = 7 \cdot 14$
87	5				
-79	6	-14	-84	5	$-79 = 6(-14) + 5$
45	-2	-22	44	1	$45 = (-2)(-22) + 1$
-90	-4	23	-92	2	$-90 = (-4)(23) + 2$
25	4				
-32	5				
43	-6				
-35	-8				
-1	4				

ขั้นตอนการหา ห.ร.ม. แบบยูคลิด (Euclidean Algorithm)

ทบทวนการหา ห.ร.ม. แบบยูคลิด โดย**ใช้ตารางการหาร**

ตัวอย่าง จงหา (-24, 56)

....

....

....

....

....

....

ลองทำดู 1) จงหา (56,72)

....

....

....

....

....

....

2) จงหา (42, -30)

....

....

....

....

....

....

การหา ห.ร.ม. แบบยุคลิด โดย<u>ใช้ขั้นตอนวิธีหาร</u>

1. นำจำนวนเต็มบวกสองจำนวนที่ต้องการหา ห.ร.ม. มาคำนวณผลการและเศษเหลือ จากการหารตามที่ได้กล่าวไปแล้ว โดยให้จำนวนมากกว่าเป็นตัวตั้ง จำนวนน้อยกว่าเป็นตัวหาร ในกรณีที่จำนวนที่สนใจเป็นจำนวนเต็มลบ สามารถใช้สมบัติของ ห.ร.ม. ที่กล่าวว่า ห.ร.ม.ของจำนวนเต็มลบย่อมมีค่าเท่ากัน

2. นำผลจากข้อ 1. มาคำนวณอีกครั้ง โดยให้ตัวหารจากข้อ 1 เป็นตัวตั้ง และเศษเหลือเป็นตัวหาร คำนวณหาผลหารและเศษเหลือตัวใหม่ออกมา

3. ทำซ้ำตามขั้นตอนที่ 2 ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะหารลงตัว

4. ห.ร.ม. จะเท่ากับเศษเหลือตัวสุดท้ายที่เกิดขึ้น (ซึ่งเศษเหลืออยู่ก่อนบรรทัดสุดท้าย

ตัวอย่าง

1. จงหา ห.ร.ม.ของ 813 กับ 124

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. จงหา ห.ร.ม. ของ 4883 กับ 321

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

แบบฝึกหัด

จงหา ห.ร.ม. แบบยูคลิด โดย<u>ใช้ขั้นตอนวิธีหาร</u>

1. (24,18)	2. (56,147) ....
2. (-550,1000)	4. (60,-72) ....
5. (-70,-154)	6. (10010 , 11858) ....

ผลรวมเชิงเส้น

กำหนดให้ d เป็น ห.ร.ม.ของ a และ b เขียนแทนด้วย $d = (a,b)$ เราสามารถหา d ในรูปผลรวมเชิงเส้น $d = ax + by$ เมื่อ $x,y \in I$

เช่น $8 = (88, 64)$ จะได้ผลรวมเชิงเส้นของ 88 และ 64 คือ $8 = (88)(3) + (64)(-4)$

วิธีหา x,y ใช้วิธีย้อนกลับ ของการหา ห.ร.ม. แบบยูคลิดโดยใช้ขั้นตอนวิธีหาร ดังนี้

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง จงหา (56,72) และหา x,y ซึ่ง (56,72) = 56x +72y

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ลองทำดู ต่อไปนี้ให้นักเรียนหา (a,b) และ x,y ซึ่ง (a,b) = ax + by

1. (30,42)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัด

จากหน้า 11 ให้นักเรียนใช้วิธีคิดย้อนกลับ คำนวณหา x,y ซึ่ง (a,b) = ax + by

1. (24,18)	2. (56,147)
2. (-550,1000)	4. (60,-72)
5. (-70,-154)	6. (10010 , 11858)

จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (Relatively Prime Numbers)

นิยาม

จำนวนเต็ม a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ก็ต่อเมื่อ (a,b) = 1

นั่นคือ จำนวนเต็มสองจำนวนใด ๆ จะเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์เมื่อทั้งสองจำนวนนั้นไม่มีตัวประกอบที่ซ้ำกันเลย

ตัวอย่าง จงหา ห.ร.ม. โดยใช้วิธีขั้นการหารของยูคลิด เพื่อพิสูจน์ว่า จำนวนต่อไปนี้เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

1. 7 กับ 15	2. 12 กับ 13 ....
3. 9 กับ 61	4. 15 กับ 49 ....
5. 111 กับ 200	6. 3519 กับ 4096 ....

ลองคิดดูหน่อย

1. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 20 มีจำนวนใดบ้างที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 7

   ตอบ..

2. เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 7

   ตอบ..

3. ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 14

   ตอบ..

4. เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 14

   ตอบ..

2. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ที่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 15 มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ เนื่องจาก 15 มีตัวประกอบคือ 3 และ 5 จะได้ว่าทุกจำนวนที่หารด้วย 3 หรือ 5 หรือ 15 ลงตัวจะไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 15

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวคูณร่วมน้อย

ตัวคูณร่วมน้อย (The least Common Multiple: L.C.M.)

นิยาม

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จำนวนเต็มบวก c ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ a|c และ b|c เรียกว่าเป็น ตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.)

หมายเหตุ

1. ค.ร.น.เป็นจำนวนเต็มบวกและไม่เป็นศูนย์
2. ใช้สัญลักษณ์ [a,b] =c เพื่อแสดงว่า c เป็น ค.ร.น. ของ a และ b
3. [a,b] = [a,-b]= [-a,b]= [-a,-b] นั่นคือไม่ว่าเราจะหา ค.ร.น.ของจำนวนเต็มบวกหรือลบย่อมมีค่าเท่ากัน
4. [0,a] = 0

ตัวอย่าง จงหา ค.ร.น. ของ 63 และ -42

❶ ใช้วิธีแยกตัวประกอบ	❷ ใช้วิธีหารสั้น
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

ตัวอย่าง จงหา ค.ร.น. ของ 96, 144 และ 270

❶ ใช้วิธีแยกตัวประกอบ	❷ ใช้วิธีหารสั้น ....

สมบัติของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

ให้ a,b เป็นจำนวนเต็ม d= (a, b) , c = [a,b]

จะได้ว่า $dc = |ab|$

ตัวอย่าง ถ้า [x,40] = 100 และ (x,40) = 20 แล้ว 3x มีค่าเท่าใด

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง a < b, 5 หาร a ลงตัว และ 3 หาร b ลงตัว ถ้า a,b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์และ ค.ร.น. ของ a, b เท่ากับ 165 แล้ว a หาร b เหลือเศษเท่ากับข้อใด (Entrance 41)

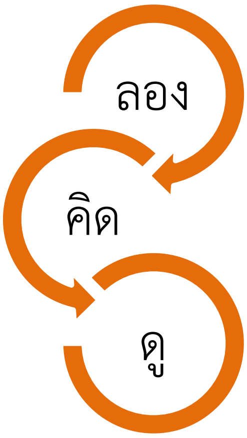
....

....

....

....

....



1.ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม.ของ n และ 42 เท่ากับ 6

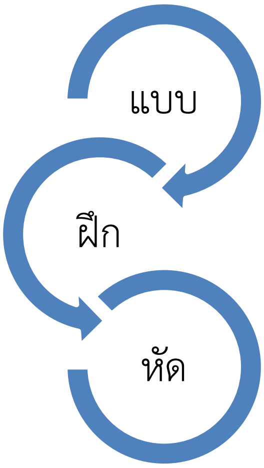
ถ้า $42 = nq_0 + r_0 \qquad 0 < r_0 < n$

$n = 2r_0 + r_1 \qquad 0 < r_1 < r_0$

$r_0 = 2r_1$

โดยที่ q_0, r_0, r_1 แล้ว ค.ร.น. ของ n และ 42 มีค่าเท่าไร (Entrance 40)

2. จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 323, 227, 155 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน (ใช้ความรู้เรื่อง ห.ร.ม.)



1. กำหนด d เป็น ห.ร.ม. ของ 216 และ b กำหนด ค.ร.น.ของ 216 และ b เป็น 2808 กำหนด q_1, q_2, q_3, q_4 เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนี้

   $216 = q_1b + 60$

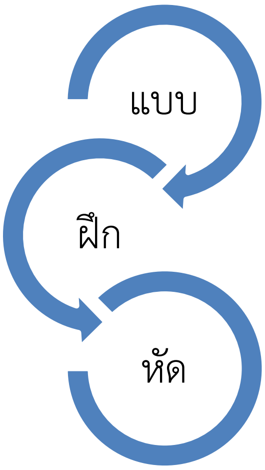
   $b = q_2(60) + 18$

   $60 = q_3(18) + 6$

   $18 = q_4(6)$

   จงหาค่าของ $q_1+q_2+q_3+q_4$

2. จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 121, 251, 189 แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน (ใช้ความรู้เรื่อง ห.ร.ม.)



3. ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่หารด้วย 4, 6, 13 แล้วมีเศษเหลือเป็น 3 (ใช้ความรู้เรื่อง ค.ร.น.)

4. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งมีสมบัติดังนี้

$100 \le n \le 1000$

45 หาร n ลงตัว และ

7 หาร n เหลือเศษ 3 แล้ว

n มีค่าเท่ากับเท่าใด (Entrance 48)

5. จงหาจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่หาร 4566 มีเศษเหลือเป็น 12 และหาร 10482 มีเศษเหลือเป็น 17

นิยาม

สมการไดโอแฟนไทน์ (Diophantine Equation) คือ สมการที่มีตัวแปรที่เกี่ยวข้อง **มากกว่าหนึ่งตัว** และมีผลเฉลย **เป็นจำนวนเต็ม**

สมการไดโอแฟนไทน์

สมการ

ต่อไปนี้เป็นสมการไดโอแฟนไทน์

$3x^2 + 2y^2 = 5$

เป็นสมการไดโอแฟนไทน์ เพราะ...

....

$4x + 3y = 1$

เป็นสมการไดโอแฟนไทน์ เพราะ...

....

$3x^3 - 2y^3 = 0$

เป็นสมการไดโอแฟนไทน์ เพราะ...

....

$2x+2y+2z = 0$

เป็นสมการไดโอแฟนไทน์ เพราะ...

....

นิยาม

สมการไดโอแฟนไทน์***เชิงเส้น*** (Linear Diophantine Equation) คือสมการไดโอแฟนไทน์ที่อยู่ในรูป

$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\dots+a_nx_n=b$

เป็นจำนวนเต็ม และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, b เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์แลเป็นตัวแปรซึ่งมีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม

*จะเห็นได้ว่าสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น **เป็นสมการดีกรีหนึ่ง** เนื่องจากทุกตัวแปรมีเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง สมการไดโอแฟนไทน์ มีที่มาจาก ไดโอแฟนทัส (Diophantus) นักคณิตศาสตร์ชาวกรีก ซึ่งศึกษาปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมการในลักษณะนี้ และเป็นหนึ่งในนักคณิตศาสตร์กลุ่มแรกที่เริ่มต้นใช้สัญลักษณ์ในวิชาพีชคณิต ไดโอแฟนทัสได้ชื่อว่าเป็น บิดาของพีชคณิต ปัจจุบันมีวิชาที่ศึกษาปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมการไดโอแฟนไทน์ เรียกว่า การวิเคราะห์ไดโอแฟนไทน์* (Diophantine analysis) ซึ่งมีความสำคัญในการศึกษาการเข้ารหัสคีย์สาธารณะ (public-key cryptography) เป็นต้น

สมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น

ในการศึกษาสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นนั้น เราจะเริ่มพิจารณาจากปัญหาที่ง่ายก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ต้องการนำเหรียญ 10 บาท และธนบัตรใบละ 20 บาท มารวมกัน ให้ได้เงิน 200 บาท จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี ให้ เป็นจำนวนเหรียญ 10 บาท และ เป็นจำนวนธนบัตรใบละ 20 บาท

....

....

....

....

....

ดังนั้นผลเฉลยทั้งหมดได้แก่..

....

....

ตัวอย่าง สกายมีเงินอยู่ 68 บาท ต้องการซื้อน้ำกระป๋องละ 8 บาท และน้ำขวดละ 12 บาท จะมีกี่วิธีที่สกายจะซื้อน้ำกระป๋อง

....

....

....

....

....

....

ดังนั้นผลเฉลยทั้งหมดได้แก่..

....

....

จาก 2 ตัวอย่างที่ผ่านมา จะสังเกตว่า ผลเฉลยที่ได้จะมีรูปแบบที่เหมือนกัน นั่นคือ ค่าของตัวแปรหนึ่งจะเพิ่มขึ้นตามสัมประสิทธิ์ของอีกตัวแปรหนึ่ง ในทำนองเดียวกัน ค่าของอีกตัวแปรหนึ่งก็จะลดลงตามสัมประสิทธิ์ของอีกตัวแปรหนึ่งเช่นกัน แต่ไม่ใช่ว่าปัญหาไดโอแฟนไทน์จะมีผลเฉลยเสมอไป ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มทั้งหมดของสมการ $12x+21y=80$

สังเกตว่า เราไม่สามารถตัดทอนโดยนำค่าคงที่หารตลอดทั้งสมการได้ แต่เราสามารถจัดรูปได้ว่า $3(4x+7y)=80$

เนื่องจากเราต้องการผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม ทำให้ได้ว่า $4x+7y$ ต้องเป็นจำนวนเต็มด้วย

แต่ $4x+7y=80/3$ ซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม จึงเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น สมการนี้ไม่มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม

จำนวนเต็ม $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ที่แทนค่าในสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$ แล้วทำให้สมการเป็นจริงเรียกว่า "**ผลเฉลยของสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้น**" (หรือเรียกสั้น ๆ ว่าผลเฉลย)

1) เรียกผลเฉลยที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระใด ๆ ซึ่งเป็นจำนวนเต็มว่า "**ผลเฉลยทั่วไป**"
2) เรียกผลเฉลยที่ประกอบไปด้วยจำนวนเต็มที่แน่นอน หรือผลเฉลยที่ได้จากการแทนค่าจำนวนเต็มในผลเฉลยทั่วไปว่า "**ผลเฉลยเฉพาะราย**"

ทฤษฎีบท

กำหนดให้ $ax+by=c$ เป็นสมการไดโอแฟนไทน์เชิงเส้นสองตัวแปร และให้ $d=(a,b)$ **ถ้า $d \nmid c$ แล้วสมการจะไม่มีผลเฉลย แต่ถ้า $d|c$ แล้วสมการมีผลเฉลย** และถ้าทราบว่า x_0, y_0 เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการแล้ว ผลเฉลยทั่วไปของสมการจะอยู่ในรูป

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n \quad \text{และ} \quad y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right)n$$

ตัวอย่าง1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ 4x + 3y = 1

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ 12x + 28y =4

....

....

....

....

....

....

....

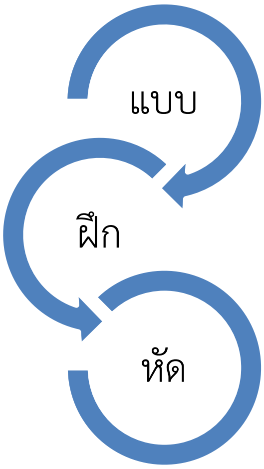
....

....

สรุปการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ ax + by = c

1. หา d =(a,b)
2. ตรวจสอบว่า $d|c$ หรือ $d \nmid c$
3. ถ้า $d \nmid c$ แล้วสมการ ax + by = c ไม่มีคำตอบในระบบจำนวนเต็ม
4. ถ้า $d|c$ เราเขียน $d = ax_1+by_1$ โดยใช้วิธีย้อนกลับขั้นการหารแบบยูคลิด
5. จากการเขียน c =kd เราเลือก $x_0 = kx_1$ และ $y_0 = ky_1$
6. สร้างคำตอบทั่วไปจาก

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)n \quad \text{และ} \quad y = y_0 + \left(\frac{a}{d}\right)n$$



จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

1. $4x + 2y = 11$

....

....

....

....

2. $2x + 6y = 8$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. $56x + 72y = 40$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....