บทที่ 8

ความน่าจะเป็น (Probability)

ในทางสถิติ คำว่า "การทดลอง (Experiment)" หมายถึงกระบวนการในการที่จะก่อให้เกิดชุดของข้อมูล ชุดของข้อมูลในที่นี้หมายถึงผลทั้งหมดที่เป็นไปได้ที่เกิดขึ้นจากการทดลอง ตัวอย่างเช่นในการทดลองโยนเหรียญ 1 เหรียญ ผลที่เกิดขึ้นเป็นไปได้ 2 แบบด้วยกันคือ หัวหรือก้อย ในการทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก ผลที่เกิดขึ้นก็จะเป็นไปตามแต้มของลูกเต๋า ผลของการทดลองที่ออกมาแตกต่างกันนั้น สะท้อนให้เห็นถึงความหมายของคำว่า "ความไม่แน่นอน (Uncertainty)" ความน่าสนใจจะอยู่ที่การศึกษาโอกาส (Chance) หรือความน่าจะเป็นของการที่จะเกิดผลเป็นแบบใดแบบหนึ่งว่าเป็นเท่าใด

8.1 สเปซตัวอย่าง (Sample Space)

นิยาม 8.1 เซตของผลที่เป็นได้ทั้งหมดจากการทดลองจะเรียกว่า สเปซตัวอย่าง และเขียนแทนด้วยเซต S ผลของการทดลองแต่ละแบบเรียกว่าเป็นสมาชิก (Element) หรือจุดตัวอย่าง (Sample Point)

ตัวอย่างเช่น ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ

S = {H, T} โดยที่ H หมายถึง หัวและ T หมายถึง ก้อย

ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าสนใจแต้มบนลูกเต๋า จะได้

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

แต่ถ้า สนใจว่าเป็นแต้มคู่หรือคี่ จะได้

S = {คู่, คี่}

ในการทดลองทำข้อสอบปรนัย 3 ข้อ ถ้าสนใจว่าทำถูกหรือผิด จะได้

S = {TTT, TTF, TFT, FTT, FFT, FTF, TFF, FFF}

โดยที่ T หมายถึงทำข้อสอบถูก และ F หมายถึงทำข้อสอบผิด

แต่ถ้าสนใจจำนวนข้อที่ทำถูก จะได้

S = {0, 1, 2, 3}

ข้อสังเกต จะเห็นได้ว่าในการทดลองหนึ่งๆ สเปซตัวอย่างอาจมีได้หลายแบบ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสนใจผลของการทดลองว่าเป็นแบบใด

8.2 เหตุการณ์ (Events)

ในการทดลองนั้นบางครั้งสิ่งที่สนใจอาจเป็นแค่ผลของการทดลองบางส่วน จากผลที่เป็นไปได้ทั้งหมด ตัวอย่างเช่นในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ ถ้าพิจารณาถึงจำนวนเหรียญที่ขึ้นหัว จะได้ว่าสเปซ ตัวอย่าง S = {0, 1, 2, 3} แต่สิ่งที่สนใจ อาจเป็นแค่จำนวนเหรียญที่ขึ้นหัวไม่เกิน 1 เหรียญ เป็นต้น

นิยาม 8.2 เหตุการณ์ หมายถึง เซตย่อย (Subset) ของสเปซตัวอย่าง

ตัวอย่างเช่น ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก

สเปซตัวอย่าง S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ถ้า E_1 เป็นเหตุการณ์ที่แต้มบนลูกเต๋ามากกว่า 2 จะได้ว่า

E_1 = {3, 4, 5, 6}

ถ้า E_2 เป็นเหตุการณ์ที่แต้มบนลูกเต๋าเป็นเลขคี่ จะได้ว่า

E_2 = {1, 3, 5}

นิยาม 8.3 กำหนดสเปซตัวอย่าง S และกำหนดเหตุการณ์ A คอมพลีเมนต์ (Complement) ของเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วย A' หมายถึง เซตของสมาชิกของ S ที่ไม่ได้เป็นสมาชิกของเหตุการณ์ A

นิยาม 8.4 กำหนดสเปซตัวอย่าง S และกำหนดเหตุการณ์ A และ B ยูเนียน (Union) ของเหตุการณ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ หมายถึงเซตของสมาชิกS ที่อยู่ใน A หรือ B

นิยาม 8.5 กำหนดสเปซตัวอย่าง S และกำหนดเหตุการณ์ A และ B อินเตอร์เซคชัน (Intersection) ของเหตุการณ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ หมายถึงเซตของสมาชิก S ที่อยู่ใน A และ B

ตัวอย่างเช่น กล่องใบหนึ่งมีสลากที่มีหมายเลขตั้งแต่ 1 – 20 อย่างละ 1 ใบ ถ้าหยิบสลาก 1 ใบจากกล่องใบนี้ จะได้ว่า S = {1, 2, 3,…, 20}

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่สลากนั้นมีหมายเลขที่หารด้วย 2 ลงตัว

B เป็นเหตุการณ์ที่สลากนั้นมีหมายเลขที่หารด้วย 3 ลงตัว

จะได้ว่า A = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

B = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

A' = เป็นเหตุการณ์ที่สลากนั้นมีหมายเลขที่หารด้วย 2 ไม่ลงตัว

A' = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19}

$A \cup B$ = เป็นเหตุการณ์ที่สลากนั้นมีหมายเลขที่หารด้วย 2 หรือ 3 ลงตัว

$A \cup B$ = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20}

$A \cap B$ = เป็นเหตุการณ์ที่สลากนั้นมีหมายเลขที่หารด้วย 2 และ 3 ลงตัว

$A \cap B$ = {6, 12, 18}

นิยาม 8.6 เหตุการณ์ A และ B จะถูกเรียกว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (Mutually Exclusive Events) ถ้า $A \cap B = \phi$

ตัวอย่างเช่น จากตัวอย่างที่หยิบสลาก ที่ได้กล่าวข้างต้น

ถ้าให้ C เป็นเหตุการณ์ที่สลากมีหมายเลขหารด้วย 5 ลงตัว

D เป็นเหตุการณ์ที่สลากมีหมายเลขหารด้วย 7 ลงตัว

C = {5, 10, 15, 20}

D = {7, 14}

ในที่นี้ $C \cap D = \phi$ ดังนั้นเหตุการณ์ C และ D เรียกว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

8.3 การนับจุดตัวอย่าง

สิ่งที่สำคัญในการทดลองสถิติก็คือ จุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็นอะไรได้บ้าง และมีจำนวนเท่าใด โดยเฉพาะอย่างยิ่งจำนวนของจุดตัวอย่าง จะเป็นสิ่งสำคัญในการคำนวณหาโอกาสที่จะเกิดขึ้นของเหตุการณ์ต่างๆ หลักการที่สำคัญอันหนึ่งในการนับจำนวนจุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ก็คือ กฎการคูณ (Multiplication Rule)

ทฤษฎีบท 8.1 ถ้างานหนึ่งสามารถเลือกทำได้ใน n_1 วิธี และในแต่ละวิธีของ n_1 สามารถเลือกทำงานอย่างที่สองได้ใน n_2 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะทำงานทั้งสองงานเท่ากับ $n_1 n_2$ วิธี

ตัวอย่าง 8.1 ชายคนหนึ่งมีเสื้อเชิ้ตอยู่ 5 ตัว และกางเกงอยู่ 4 ตัว อยากทราบว่าชายคนนี้จะแต่งตัวได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ชายคนนี้เลือกใส่เสื้อได้ 5 วิธี

และหลังจากใส่เสื้อแล้ว ชายคนนั้นเลือกใส่กางเกงได้อีก 4 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่เขาจะแต่งตัวได้ทั้งหมดเท่ากับ $5 \times 4 = 20$ วิธี

ตัวอย่าง 8.2 ในการโยนเหรียญ 2 เหรียญ จำนวนจุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีกี่แบบ

วิธีทำ ในการโยนเหรียญที่ 1 เหตุการณ์ที่เป็นไปได้คือเหรียญขึ้น หัวหรือก้อยซึ่งมี 2 แบบ

ในการโยนเหรียญที่ 2 ก็เช่นกัน เป็นไปได้อีก 2 แบบ

ดังนั้นจำนวนจุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ในการโยนเหรียญ 2 เหรียญคือ $2 \times 2 = 4$ แบบ

ทฤษฎีบท 8.2 ถ้ามีงานที่ต้องทำ k อย่าง ทั้งนี้งานที่ 1 มีทางเลือก n_1 วิธี งานที่ 2 มีทางเลือก n_2 วิธี ... งานที่ k มีทางเลือก n_k วิธี ดังนั้นในการทำงาน k อย่างนั้น สามารถทำได้ทั้งหมด $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ วิธี

ตัวอย่าง 8.3 ในการสร้างเลข 4 หลักจากเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5 ถ้าแต่ละหลักสามารถใช้เลขซ้ำกันได้ อยากทราบว่าเลข 4 หลักที่เป็นไปได้นั้นมีทั้งหมดกี่จำนวนที่เป็นเลขคี่

วิธีทำ ในหลักพันนั้นสามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 5 วิธี (ใช้เลข 0 ไม่ได้)

ในหลักร้อยนั้นสามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 6 วิธี.

ในหลักสิบนั้นสามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 6 วิธี

ในหลักหน่วยนั้นสามารถเลือกใช้ตัวเลขได้ 3 วิธี (เลขคี่ 1, 3, 5)

ดังนั้นจำนวนเลข 4 หลักที่เป็นเลขคี่มีทั้งหมดเท่ากับ $5 \times 6 \times 6 \times 3 = 540$ จำนวน

ตัวอย่าง 8.4 ในการโยนลูกเต๋า 3 ลูก จำนวนจุดตัวอย่างที่เป็นไปได้มีกี่แบบ

วิธีทำ ในการโยนลูกเต๋า ลูกที่ 1 จำนวนแบบที่เป็นไปได้มี 6 แบบ

ในการโยนลูกเต๋า ลูกที่ 2 จำนวนแบบที่เป็นไปได้มี 6 แบบ

ในการโยนลูกเต๋า ลูกที่ 3 จำนวนแบบที่เป็นไปได้มี 6 แบบ

ดังนั้นจำนวนจุดตัวอย่างของการโยนลูกเต๋า 3 ลูกเท่ากับ $6 \times 6 \times 6 = 216$ แบบ

8.3.1 การเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง ในแนวเส้นตรง

นิยาม 8.7 การจัดลำดับ (Permutation) คือการจัดเรียงลำดับของสิ่งของจำนวนหนึ่ง ซึ่งอาจจะเป็นสิ่งของทั้งหมดหรือเป็นเพียงบางส่วน

ตัวอย่าง 8.5 ถ้านำอักษร 4 ตัว a, b, c และ d มาเรียงลำดับกัน จะได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ถ้าพิจารณาอักษร 4 ตัวมาเรียงกันในลักษณะ $\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{4}{\_}$

จะเห็นได้ว่าในตำแหน่งที่ 1 สามารถเลือกตัวอักษรดังกล่าวได้ 4 วิธี

หลังจากเลือกตัวอักษรที่ตำแหน่งที่ 1 แล้วเหลือตัวอักษรที่จะอยู่ตำแหน่งที่ 2 ได้ 3 วิธี และหลังจากเลือกตัวอักษรตำแหน่งที่ 2 จะเหลือตัวอักษรที่จะอยู่ในตำแหน่งที่ 3 และ 4 ได้ 2 วิธี และ 1 วิธี ตามลำดับ

ดังนั้นการนำอักษร 4 ตัวมาเรียงลำดับกันจะได้ $= 4 \times 3 \times 2 \times 1$ วิธี

$= 4!$ วิธี

$= 24$ วิธี

ทฤษฎีบท 8.3 การจัดลำดับสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกันจะได้ n! วิธี

ตัวอย่าง 8.6 ถ้านำคน 5 คนมายืนเรียงกันจะได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ การนำคน 5 คนมาเรียงกันจะได้ $= 5!$ วิธี

$= 120$ วิธี

8.3.2 การเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน r สิ่งจากของทั้งหมด n สิ่ง

ในการจัดลำดับสิ่งของนั้น บางครั้งอาจไม่ได้นำมาเรียงกันทั้งหมด กล่าวคือถ้ามีสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง อาจจะนำมาเรียงลำดับกันเพียง r สิ่ง โดยที่ $r < n$

ถ้าสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาเรียงกันทีละ r สิ่ง จะเป็นในลักษณะดังนี้ $\underset{1}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \ldots\ \underset{r}{\_}$

จะเห็นได้ว่าในตำแหน่งที่ 1 สามารถเลือกสิ่งของได้ n วิธี

ในตำแหน่งที่ 2 สามารถเลือกสิ่งของได้ $n - 1$ วิธี

ในตำแหน่งที่ 3 สามารถเลือกสิ่งของได้ $n - 2$ วิธี

…

ในตำแหน่งที่ n สามารถเลือกสิ่งของได้ $n - (n - 1)$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่เรียงสิ่งของ r สิ่งจาก n สิ่ง $= n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$ วิธี

$= \dfrac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

ทฤษฎีบท 8.4 การจัดลำดับของ n สิ่งที่แตกต่างกัน แต่นำมาเรียงกัน r สิ่งจะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $n P r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

ตัวอย่าง 8.7 จากอักษร a, b, c, d และ e นำมาเรียงกันเพียง 3 ตัว จะได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จะเรียงอักษร 3 ตัวจาก 5 ตัวนั้นจะได้ $= \frac{5!}{(5-3)!}$

$= 60$ วิธี

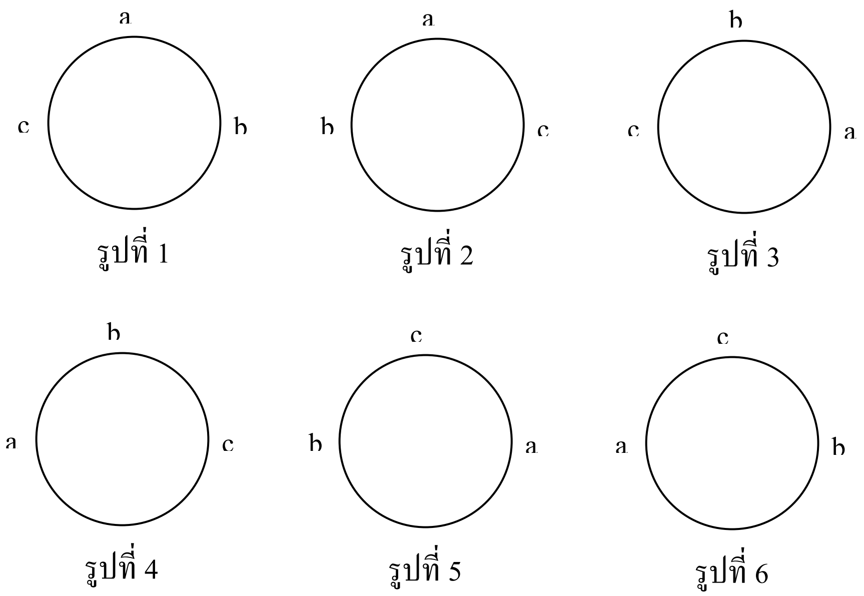
ตัวอย่าง 8.8 หนังสือที่แตกต่างกัน 6 เล่ม ถ้านำหนังสือเพียงแค่ 2 เล่มมาเรียงกัน จะได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ หนังสือ 6 เล่มเอามาเรียงกัน 2 เล่มจะได้ทั้งหมด $= \frac{6!}{(6-2)!}$ วิธี

$= 30$ วิธี

8.3.3 การเรียงสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่งในแนววงกลม

ในการนำของ n สิ่งที่แตกต่างกันมาเรียงกันในแนวเส้นตรงนั้น จำนวนวิธีที่ได้เท่ากับ n! วิธี อย่างเช่นการเอาตัวอักษร a, b, c มาเรียงกันจะได้ทั้งหมด 3! วิธี ซึ่งได้แก่ abc, acb, bac, bca, cab และ cba ถ้าทั้ง 6 แบบดังกล่าวมาเรียงในแนววงกลมจะเป็นดังนี้



รูปที่ 8.1 การเรียงตัวอักษร a, b, c ในแนววงกลม

จากรูปจะเห็นได้ว่า abc ในรูปที่ 1 เหมือนกับ bca ในรูปที่ 4 และ cab ในรูปที่ 5 และ acb ในรูปที่ 2 เหมือนกับ bac ในรูปที่ 3 และ cba ในรูปที่ 6

นั่นคือจาก 6 แบบของการเรียงดังกล่าว จะเหลือเพียง 2 วิธีที่เป็นเช่นนี้เพราะการเรียงในแนวเส้นตรงตัวอักษรที่อยู่ในตำแหน่งแรกหรือตำแหน่งสุดท้ายจะแตกต่างกัน แต่ในแนววงกลมจะไม่มี

ตำแหน่งแรกและตำแหน่งสุดท้าย ดังนั้นการนับจำนวนวิธีที่เรียงกันในแนววงกลมนั้น ต้องคิดว่าตัวอักษรใดตัวหนึ่งคงที่ ซึ่งจะเป็น a, b หรือ c ก็ได้ ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเรียงสลับกันไปมาก็จะเหลือแค่ตัวอักษร 2 ตัว ซึ่งจะสลับกันได้ 2! วิธี

ทฤษฎีบท 8.5 ถ้ามีของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาเรียงกันเป็นวงกลม จะได้ทั้งหมด (n – 1)! วิธี

ตัวอย่าง 8.9 ถ้าคน 5 คนมายืนเรียงกันเป็นวงกลมจะได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีที่คน 5 คนมายืนเรียงกันเป็นวงกลม = (5 – 1)! วิธี

= 24 วิธี

8.3.4 การเรียงสิ่งของ n สิ่งแต่มีบางสิ่งที่ซ้ำกัน

ในการเรียงตัวอักษร 6 ตัวคือ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c สลับกันไปมานั้นจะได้ทั้งหมด 6! แบบด้วยกัน ทั้งนี้ใน 6! แบบนั้นมีที่ตัวอักษร a_1, a_2 และ a_3 สลับกันไปมา 3! แบบ ซึ่งถ้าคิดว่าตัวอักษร a_1, a_2 และ a_3 นั้นเหมือนกันคือเป็น a ตัวเดียวกัน จำนวนแบบที่จะได้ก็จะลดลงเหลือ $\frac{6!}{3!}$ แบบ และในทำนองเดียวกัน สำหรับตัวอักษร b_1 และ b_2 ซึ่งถ้าคิดว่าเป็น b เหมือนกัน จำนวนแบบทั้งหมดที่เป็นไปได้ก็จะเท่ากับ $\frac{6!}{3!\,2!}$ แบบ

ทฤษฎีบท 8.6 ในการเรียงลำดับสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งใน n สิ่งนี้มีสิ่งของ n_1 สิ่งที่ซ้ำกัน มีสิ่งของ n_2 สิ่งที่ซ้ำกัน ... และสิ่งของ n_k สิ่งที่ซ้ำกัน จะได้ว่าการเรียงลำดับสิ่งของ n สิ่งนั้นเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ วิธี

ตัวอย่าง 8.10 จากตัวอักษรในคำว่า “STATISTICS” ถ้านำมาเรียงกันไปมาโดยไม่สนใจความหมายจะได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จากตัวอักษรในคำดังกล่าว จะมี “S” 3 ตัว “T” 3 ตัว “I” 2 ตัว และ “A” และ “C” อย่างละ 1 ตัว

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ตัวอักษรในคำดังกล่าว เรียงสลับกันจะได้ = $\frac{10!}{3!\,3!\,2!\,1!\,1!}$ วิธี

= 50, 400 วิธี

8.3.5 การจัดหมู่ (Combination)

นิยาม 8.8 ในการนำสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน และนำมาเรียงกันทีละ r สิ่ง จำนวนวิธีที่ได้เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี แต่ถ้าของ r สิ่งนั้นไม่ได้นำมาเรียงกัน กล่าวคือไม่ได้สนใจลำดับของสิ่งของ r สิ่งดังกล่าว จะเรียกว่าเป็นการจัดหมู่

ทฤษฎีบท 8.7 ถ้ามีของ n สิ่งที่แตกต่างกัน แล้วเอามา r สิ่ง จำนวนวิธีที่ได้จะเท่ากับ $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ วิธี ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ n C r หรือ $\binom{n}{r}$

ตัวอย่าง 8.11 จะเลือกคน 6 คนมาเป็นกรรมการชุดหนึ่งซึ่งมี 4 คนได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนชุดของกรรมการ $= \binom{6}{4}$ วิธี

$= \frac{6!}{4!\,2!}$ วิธี

$= 15$ วิธี

8.4 ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์

ในการทดลองที่มีสเปซตัวอย่างคือเซต S ถ้า E เป็นเหตุการณ์หนึ่งที่เกิดขึ้น สิ่งที่น่าสนใจเกี่ยวกับเหตุการณ์ E ก็คือโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ E ได้นั้นเป็นเท่าใด

นิยาม 8.9 ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่มีสเปซตัวอย่างคือ S ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย P(E) จะหมายถึง ผลรวมของน้ำหนักของจำนวนจุดตัวอย่างใน E ทั้งนี้

1. $0 \le P(E) \le 1$
2. $P(\phi) = 0$
3. $P(S) = 1$

ตัวอย่าง 8.12 ในการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 2 เหรียญ ความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัวและก้อยอย่างละ 1 เหรียญ เป็นเท่าใด

วิธีทำ ในที่นี้ สเปซตัวอย่าง S = {HH, HT, TH, TT}

ในเซต S มี 4 จุดตัวอย่าง ซึ่งแต่ละจุดตัวอย่างมีน้ำหนักหรือโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน เพราะเหรียญมีความเที่ยงตรง ซึ่งถ้าให้น้ำหนักแต่ละจุดตัวอย่างเท่ากับ x

ดังนั้นจะได้ว่า $4x = 1$ หรือ $x = \frac{1}{4}$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้น H และ T อย่างละ 1 เหรียญ

ดังนั้น E = {HT, TH}

และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E = P(E)

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 8.13 ในการโยนลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 1 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มบนลูกเต๋ามากกว่าหรือเท่ากับ 3 เป็นเท่าใด

วิธีทำ ในที่นี้ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ทั้งนี้จะได้ว่าน้ำหนักของแต่ละจุดตัวอย่างเท่ากับ $\frac{1}{6}$

ให้ E = เหตุการณ์ที่แต้มบนลูกเต๋ามากกว่าหรือเท่ากับ 3

= {3, 4, 5, 6}

$$P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

ทฤษฎีบท 8.8 ในการทดลองหนึ่งที่มีจำนวนจุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ N แบบ ที่แตกต่างกัน และมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆ กัน ถ้า E เป็นเหตุการณ์หนึ่งโดยที่ $E \subset S$ โดยที่จำนวนจุดตัวอย่างใน E = n แล้วจะได้ว่า $P(E) = \frac{n}{N}$

ตัวอย่าง 8.14 ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ ถ้าสุ่มหยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับนี้ แล้วจงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

1. ไพ่ที่มีแต้ม 7
2. ไพ่ที่เป็นโพดำ

วิธีทำ ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ไพ่ที่หยิบได้มีแต้ม 7

E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ไพ่ที่หยิบได้เป็นโพดำ

เนื่องจากไพ่ที่มีแต้ม 7 มี 4 ใบด้วยกัน

ดังนั้น $P(E_1) = \frac{4}{52}$

$$= \frac{1}{13}$$

และไพ่ที่เป็นโพดำ มี 13 ใบ

จะได้ $P(E_2) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

ตัวอย่าง 8.15 ในการโยนลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่

1. ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าเท่ากับ 6
2. ได้แต้มเหมือนกันทั้ง 2 ลูก

วิธีทำ ในที่นี้จำนวนจุดตัวอย่างในสเปซตัวอย่าง $= 6 \times 6 = 36$ จุดตัวอย่าง

ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าเท่ากับ 6

ดังนั้น $E_1 = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$

จะได้ $P(E_1) = \frac{5}{6}$

ให้ E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋า 2 ลูกได้แต้มเหมือนกัน

$E_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

จะได้ $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$

8.4.1 กฎที่สำคัญต่างๆ

ในการคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์หนึ่งๆนั้น อาจหาได้ง่ายขึ้นถ้าทราบกฎบางข้อที่เกี่ยวข้องกับการหาความน่าจะเป็นดังกล่าวนั้น

ทฤษฎีบท 8.9 กำหนดสเปซตัวอย่าง S และกำหนดเหตุการณ์ A และ B จะได้ว่า

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

ทฤษฎีบท 8.10 กำหนดสเปซตัวอย่าง S และกำหนดเหตุการณ์ A และ B ว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน จะได้ว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ทฤษฎีบท 8.11 กำหนดสเปซตัวอย่าง S และกำหนดเหตุการณ์ A จะได้ว่า

$$P(A) + P(A') = 1$$

ตัวอย่าง 8.16 กล่องใบหนึ่งมีสลากที่มีหมายเลข 1 - 30 อย่างละใบ หยิบสลาก 1 ใบจากกล่องใบนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่

1. สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 3 ลงตัว
2. สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว
3. สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 5 ลงตัว
4. สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 3 และ 5 ลงตัว
5. สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัว

วิธีทำ 1. ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 3 ลงตัว

ในที่นี้ $A = \{3, 6, 9, \ldots, 27, 30\}$

จะได้ว่า $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

2. ให้ A' เป็นเหตุการณ์ที่สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

จาก $P(A') = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

3. ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 5 ลงตัว

ในที่นี้ $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

จะได้ว่า $P(B) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

4. $A \cap B$ จะเป็นเหตุการณ์ที่สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 3 และ 5 ลงตัว

ในที่นี้ $A \cap B) = \{15, 30\}$

จะได้ว่า $P(A \cap B) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

5. $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่สลากที่หยิบได้เป็นสลากที่มีหมายเลขที่หารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัว

จาก $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

จะได้ว่า $P(A \cup B) = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{2}{30}$

$$= \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

ตัวอย่าง 8.17 หยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับหนึ่งที่มี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่ที่มีแต้ม 2 หรือเป็นโพแดง

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ไพ่ที่มีแต้ม 2

B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ไพ่เป็นโพแดง

จะได้ $P(A) = \frac{4}{52}$

$P(B) = \frac{13}{52}$

$A \cap B$ หมายถึงเหตุการณ์ที่ได้ 2 และเป็นโพแดง

$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$

P(เหตุการณ์ที่ได้ไพ่แต้ม 2 หรือเป็นโพแดง) $= P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

ตัวอย่าง 8.18 ในการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 4 เหรียญ 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ

วิธีทำ ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวอย่างน้อย 1 เหรียญ

จะได้ A' เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญไม่ขึ้นหัวเลย (ขึ้นก้อยทั้ง 4 เหรียญ)

$$P(A) = 1 - P(A')$$
$$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

8.4.2 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)

นิยาม 8.10 กำหนดเหตุการณ์ A และ B จะใช้สัญลักษณ์ P(A/B) หมายถึงความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ A เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้ว

ตัวอย่าง 8.19 ในการโยนลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูก

ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้ง 2 ลูกเป็น 7

B เป็นเหตุการณ์ที่แต้มบนลูกที่ 1 มากกว่าแต้มบนลูกที่ 2

จงหา P(A/B) และ P(B/A)

วิธีทำ ในที่นี้ A = {(1, 6), (6, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)}

B = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)}

P(A/B) = ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้ง 2 ลูกเป็น 7 เมื่อกำหนดว่าแต้มบนลูกเต๋าที่ 1 มาก กว่าแต้มบนลูกเต๋าที่ 2

จะเห็นได้ว่า เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นนั้น จากจำนวนจุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ 36 แบบนั้น ก็จะลดลงเหลือเท่ากับจำนวนจุดตัวอย่างของเหตุการณ์ B คือ 15 แบบ และใน 15 แบบนี้ จำนวนจุดตัวอย่างที่ผลรวมเป็น 7 ก็จะมีเพียง 3 แบบเท่านั้น คือ (6, 1), (5, 2) และ (4, 3)

ดังนั้น $P(A/B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

P(B/A) = ความน่าจะเป็นที่แต้มบนลูกที่ 1 มากกว่าแต้มบนลูกที่ 2 เมื่อกำหนดว่าผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทั้ง 2 ลูกเป็น 7

เช่นเดียวกับข้างต้น คือเมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นนั้น จากจำนวนจุดตัวอย่างที่เป็นไปได้ 36 แบบนั้น ก็จะลดลงเหลือเท่ากับจำนวนจุดตัวอย่างของเหตุการณ์ A คือ 6 แบบ และใน 6 แบบดังกล่าว จำนวนจุดตัวอย่างที่แต้มบนลูกที่ 1 มากกว่าแต้มบนลูกที่ 2 ก็มีเพียง 3 แบบเท่านั้น คือ (6, 1), (5, 2) และ (4, 3)

นั่นคือ $P(B/A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

จาก P(A/B) และ P(B/A) ดังกล่าว จะเห็นได้ว่าการหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข หรือการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ได้กำหนดว่ามีอีกเหตุการณ์หนึ่งได้เกิดขึ้นนั้น เป็นการหาจำนวนจุดของเหตุการณ์นั้น จากจำนวนจุดของตัวอย่างที่สเปซตัวอย่างลดลง (Reduced Sample Space) หรือเท่ากับจำนวนจุดตัวอย่างของเหตุการณ์ที่กำหนดว่าได้เกิดขึ้นแล้ว

ทฤษฎีบท 8.12 กำหนด A และ B เป็นเหตุการณ์ โดยที่ $P(B) > 0$ จะได้ว่า $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

ตัวอย่างเช่น จากตัวอย่าง 8.19

$$P(A) = \frac{6}{36}, \qquad P(B) = \frac{15}{36}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36}$$

ดังนั้น $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{36} / \frac{15}{36}$

$$= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

และ $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{3}{36} / \frac{6}{36}$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 8.20 จากข้อมูลของพนักงานบริษัทแห่งหนึ่ง ปรากฏผลดังตาราง

	สำเร็จ การศึกษาต่ำกว่าปริญญาตรี	สำเร็จ การศึกษาปริญญาตรีหรือสูงกว่า	รวม
ผู้ชาย	100	300	400
ผู้หญิง	150	450	600
รวม	250	750	1000

ถ้าสุ่มเลือกพนักงานของบริษัทแห่งนี้มา 1 คน พบว่าเป็นผู้หญิง แล้วความน่าจะเป็นที่พนักงานนั้นจะสำเร็จการศึกษาที่ต่ำกว่าปริญญาตรีเป็นเท่าใด

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่พนักงานสำเร็จการศึกษาที่ต่ำกว่าปริญญาตรี

B เป็นเหตุการณ์ที่พนักงานเป็นผู้หญิง

จาก $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{150}{1000} / \frac{600}{1000}$

$= \frac{150}{600} = \frac{1}{4}$

8.4.3 เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน (Independent Events)

ในการหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข P(A/B) ตามที่ได้กล่าวมาแล้วนั้นจะเห็นได้ว่า เมื่อได้กำหนดว่าเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้น ก็จะมีผลกระทบต่อการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A อย่างไรก็ตาม ในบางสถานการณ์ การกำหนดว่าเหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้น อาจไม่ส่งผลกระทบต่อการเกิดเหตุการณ์ A ก็เป็นไปได้ และนั่นหมายถึงว่า P(A/B) = P(A)

นิยาม 8.11 เหตุการณ์ A และ B จะเรียกว่าเป็นเหตุการณ์ที่อิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ P(A/B) = P(B) หรือ P(B/A) = P(B)

ทฤษฎีบท 8.13 เหตุการณ์ A และ B จะเป็นอิสระต่อกันก็ต่อเมื่อ $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

ตัวอย่าง 8.21 เหรียญอันหนึ่งถูกถ่วงน้ำหนัก ให้โอกาสที่จะขึ้นหัว เป็นสองเท่าของโอกาสที่จะขึ้นก้อย ถ้าโยนเหรียญนี้ 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1. เหรียญขึ้นก้อยทั้ง 2 ครั้ง
2. เหรียญขึ้นหัว 1 ครั้ง

วิธีทำ ให้โอกาสที่เหรียญจะขึ้นก้อยเท่ากับ y

ดังนั้นโอกาสที่เหรียญขึ้นหัวเท่ากับ 2y

จะได้ว่า $y + 2y = 1$ หรือ $y = \frac{1}{3}$

ถ้า T, H หมายถึงเหรียญขึ้นหน้าก้อย และหัวตามลำดับ

ความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นก้อยทั้ง 2 ครั้ง $= P\,(TT)$

$= P(T)P(T)$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{1}{9}$

ที่ P (TT) = P(T) P(T) เป็นเพราะการที่ครั้งที่ 1 เหรียญขึ้นหน้าก้อย ไม่ได้ส่งผลอะไรกับการโยนครั้งที่สอง กล่าวคือการโยนเหรียญแต่ละครั้ง เป็นอิสระต่อกัน

ความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัว 1 ครั้ง $= P\,(TH\,) + P\,(T\,H)$

$= P(T)P(H) + P(H)P(T)$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{4}{9}$$

ทฤษฎีบท 8.14 กำหนด $\{E_1, E_2, \ldots E_n\}$ เป็นเซตของเหตุการณ์จากสเปซตัวอย่าง S โดยที่

1. $P(E_i) \neq 0$ ทุกค่า $i = 1,2,\ldots,n$
2. $E_i \cap E_j = 0$ ทุกค่า $i \neq j$
3. $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots \cup E_n$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์หนึ่งของ S แล้ว $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)$

ตัวอย่าง 8.22 โรงงานผลิตหลอดไฟฟ้าแห่งหนึ่งมีเครื่องจักรที่ใช้ในการผลิต 3 เครื่องคือเครื่องจักร A, B และ C ซึ่งมีอัตราการผลิต 40%, 30% และ 30% ตามลำดับ หลอดไฟฟ้าที่ผลิตจากเครื่องจักร 3 เครื่องดังกล่าวนี้ พบว่ามีหลอดไฟฟ้าเสีย 3%, 5% และ 4% สำหรับเครื่องจักร A, B และ C ตามลำดับ ถ้าสุ่มหยิบหลอดไฟฟ้าจากโรงงานนี้มา 1 หลอด ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้านี้จะเป็นหลอดเสียมีค่าเท่าใด

วิธีทำ ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่หลอดไฟฟ้าที่สุ่มหยิบมาเป็นหลอดเสีย

จะได้ว่า $P(D) = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C)$

$$= (0.4)(0.03) + (0.3)(0.05) + (0.3)(0.04)$$
$$= 0.012 + 0.015 + 0.012$$
$$= 0.039$$

กฎของเบยส์ (Bayes' Rule)

ทฤษฎีบท 8.15 กำหนด $\{E_1, E_2, \ldots E_n\}$ เป็นเซตของเหตุการณ์จากสเปซตัวอย่าง S โดยที่

1. $P(E_i) \neq 0$ ทุกค่า $i = 1,2,\ldots,n$
2. $E_i \cap E_j = 0$ ทุกค่า $i \neq j$
3. $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots \cup E_n$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์หนึ่งของ S โดยที่ $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)$ และ $P(A) \neq 0$ แล้ว

$$P(E_j/A) = \frac{P(E_j)P(A/E_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A/E_i)} \quad \text{ทุกค่า } i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

ตัวอย่าง 8.23 จากตัวอย่าง 8.22 ถ้าสุ่มหยิบหลอดไฟฟ้ามา 1 หลอด และพบว่าเป็นหลอดเสีย แล้วความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้านี้มาจากเครื่อง B เป็นเท่าใด

วิธีทำ จากกฎของเบยส์จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
P(B/D) &= \frac{P(B)P(D/B)}{P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)} \\
&= \frac{(0.3)(0.05)}{(0.4)(0.03)+(0.3)(0.05)+(0.3)(0.04)} \\
&= \left(\frac{0.015}{0.039}\right) \\
&= \left(\frac{5}{13}\right)
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด

1. การทดลองต่อไปนี้ มีจุดตัวอย่างเป็นจำนวนเท่าใด
1.1 โยนลูกเต๋า 1 ลูก 3 ครั้ง
1.2 โยนเหรียญ 1 เหรียญ 4 ครั้ง
1.3 ทำข้อสอบที่มี 3 ตัวเลือก 5 ข้อ

2. กำหนดอักษร “a, b, c, d, e, f” จงหาจำนวนวิธีที่
2.1 นำอักษรทั้งหมด 6 ตัวมาเรียงกัน
2.2 นำอักษรเพียง 4 ตัวจาก 6 ตัวมาเรียงกัน
2.3 นำอักษรมา 4 ตัวแต่ไม่ได้สนในลำดับ
2.4 นำอักษร 4 ตัว มาเรียงในแนววงกลม

3. จากอักษรคำว่า “Mississippi”
3.1 ถ้านำมาเรียงสลับกันทั้งหมดจะได้กี่วิธี
3.2 ถ้านำมาเรียงกันทีละ 4 ตัวได้กี่วิธี

4. จากตัวเลข 0,1,2,3,4,5 ถ้านำมาสร้างตัวเลข 3 หลัก จะได้กี่วิธี
4.1 ถ้าตัวเลขใช้ซ้ำกันได้
4.2 ถ้าตัวเลขใช้ซ้ำกันไม่ได้
4.3 จากข้อ 4.2 มีกี่วิธีที่
   4.3.1 เป็นเลขคี่
   4.3.2 เป็นเลขคู่
   4.3.3 เป็นเลขที่มากกว่า 300
   4.3.4 เป็นเลขที่น้อยกว่า 250
   4.3.5 เป็นเลขที่มากกว่า 150 แต่น้อยกว่า 450

5. ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 5 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่
5.1 ลูกเต๋าขึ้นหน้า 2 หรือ 3 จำนวน 3 ครั้ง
5.2 ลูกเต๋าขึ้นหน้า 2 หรือ 3 อย่างน้อย 2 ครั้ง
6. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก และสีดำ 2 ลูก สุ่มหยิบลูกบอล 4 ลูก จากกล่องใบนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่

6.1 ได้ลูกบอลสีแดง 2 ลูกและสีขาวและสีดำเย่างละ 1 ลูก

6.2 ได้ลูกบอลสีแดง 3 ลูก

6.3 ได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก

7. จากกล่องที่มีลูกบอล 10 ลูกจากข้อ 6 สุ่มหยิบลูกบอลมา 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีละลูก เป็นเท่าใด ถ้าการหยิบลูกบอล 3 ลูกนั้นเป็นแบบ

7.1 หยิบทีละลูกแล้วใส่คืน

7.2 หยิบทีละลูกแล้วไม่ใส่คืน

7.3 หยิบทีเดียว 3 ลูก

8. กล่องใบหนึ่งมีสลากที่มีหมายเลขตั้งแต่ 1-100 อย่างละ 1 ใบ สุ่มหยิบสลากมา 1 ใบ

ถ้าให้ A เป็นหมายเลขสลากที่หารด้วย 3 ลงตัว

B เป็นหมายเลขสลากที่หารด้วย 5 ลงตัว

จงหา 8.1 $P(A)$, $P(B)$

8.2 $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$

8.3 $P(A/B)$, $P(B/A)$