

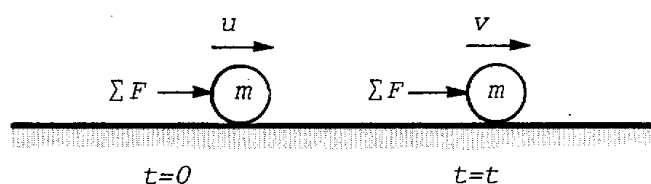
บทที่ 5

การชนและโมเมนตัม

5.1 ความหมายของการดล

ในชีวิตประจำวันเรามักจะพบกับแรงชนิดต่างๆ ที่กระทำต่อวัตถุ บางแรงกระทำต่อวัตถุเป็นเวลานาน บางแรงกระทำต่อวัตถุเป็นเวลาสั้นๆ ถ้าแรงกระทำต่อวัตถุนาน เราหาขนาดของแรงนั้นได้จากสมการ $F = ma$ ได้เลย แต่ถ้าแรงนั้นกระทำต่อวัตถุเป็นเวลาสั้นๆ การหาแรงจากสมการดังกล่าวจะไม่ค่อยสะดวกนัก เช่น แรงที่ลูกบอลกระทบพื้น แรงที่ลูกปิงปองกระทบไม้ หรือแรงที่เกิดจากการชนกันของวัตถุ เป็นต้น

กำหนดให้วัตถุมวล m ถูกกระทำด้วยแรงลัพธ์ ΣF ให้เคลื่อนที่บนพื้นราบจากความเร็วต้น u เป็น v ในเวลา t



$$\begin{aligned}
 \text{จากกฎข้อ 2 ของนิวตัน} \quad & \vec{\Sigma F} = m \vec{a} \\
 \text{แต่} \quad & \vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{u}}{t} \\
 \text{เพราะฉะนั้นแทนค่า} \quad & \vec{\Sigma F} = m \frac{\vec{v} - \vec{u}}{t} \\
 & \vec{\Sigma F} \times t = m \vec{v} - m \vec{u}
 \end{aligned}$$

แรงที่เกิดขึ้นกับวัตถุในช่วงเวลาสั้น ๆ เรียกว่า แรงดล (Impulsive Force)

แรงลัพธ์ที่คูณกับเวลา ($\vec{\Sigma F} \times t$) เรียกว่า การดล (Impulse)

มวลคูณด้วยความเร็ว ($m\vec{u}$, $m\vec{v}$) เรียกว่า โมเมนตัม ใช้สัญลักษณ์ $\vec{P}$

$$\text{จากสมการข้างบนจะได้ การดล} = \vec{\Sigma F} \times t = m \vec{v} - m \vec{u} = \Delta \vec{P}$$

การดลและการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม ($\Delta \vec{P}$) เป็นปริมาณเวกเตอร์มีทั้งขนาดและทิศทาง

5.2 การคำนวณเกี่ยวกับการดลและการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม

การคำนวณการดล เราสามารถหาการดลได้ 2 แบบ คือ

1. การดลจาก แรงกระทำ ต่อวัตถุ การคำนวณอยู่ในรูปสมการ $\Sigma \vec{F} \times t$
2. การดลจากอัตราเร็วของวัตถุ การคำนวณอยู่ในรูปสมการ $m \vec{v} - m \vec{u}$

5.3 การคำนวณการดลจากแรงกระทำ

แยกการพิจารณาได้ 2 แบบคือ

5.3.1 การดลเนื่องจากแรงคงที่

ถ้ามีแรงดลกระทำต่อวัตถุจะให้การดลมีค่าเท่ากับ ผลคูณของแรงลัพธ์กับเวลา มีหน่วยเป็นนิวตัน-วินาที

$$\text{การดล} = \Sigma \vec{F} \times t$$

5.3.2 การดลเนื่องจากแรงไม่คงที่

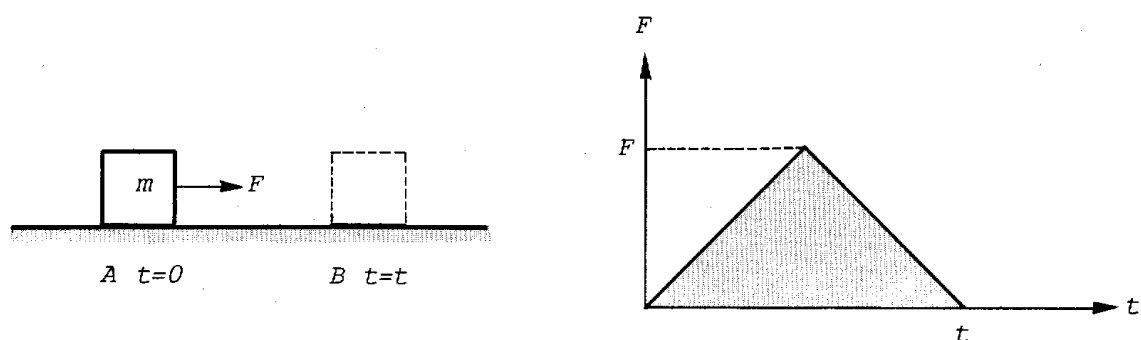
ถ้ามีแรงไม่คงที่กระทำต่อวัตถุจะให้การดลมีค่าเท่ากับ พื้นที่ใต้กราฟระหว่างแรงกับเวลา

$$\text{การดล} = F \times t = \text{พื้นที่ใต้กราฟระหว่าง } F \text{ กับ } t$$

การดลจากแรงไม่คงที่แยกการพิจารณาได้ 2 แบบคือ

1. ถ้ามีแรงไม่คงที่เพียงแรงเดียวกระทำกับวัตถุ จะให้การดลเท่ากับ พื้นที่ใต้กราฟ F กับ t

จากรูปวัตถุมวล m ถูกกระทำด้วยแรง F ไม่คงที่ดังกราฟให้เคลื่อนที่จาก A ไป B นาน t ต้องการหาการดลของการเคลื่อนที่จาก A ไป B



$$\text{การดล} = F \times t = \text{พื้นที่ใต้กราฟระหว่าง } F \text{ กับ } t$$

$$\text{เพราะฉะนั้นการคล} = \frac{1}{2} \times F \times t = \frac{1}{2} Ft$$

2. ถ้ามีแรงคงที่และไม่คงที่กระทำกับวัตถุ มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. ให้เขียนรูปการเคลื่อนที่ของวัตถุพร้อมทั้งกำหนดทิศทางของแรง
2. เขียนกราฟของแรงต่างๆ ในความสัมพันธ์ของ F กับ t
3. คำนวณหาการคลจากสมการ

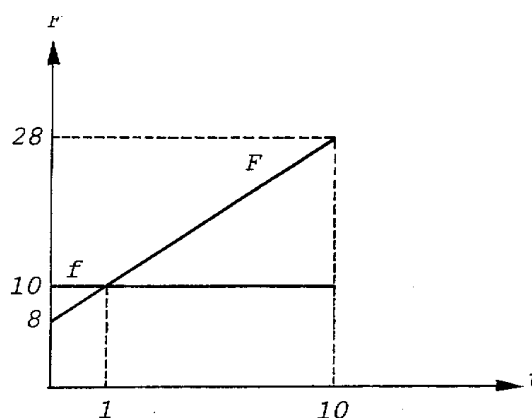
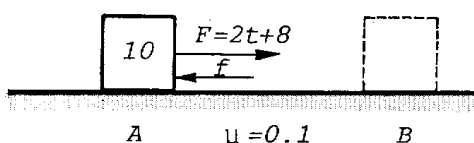
$$\text{การคล} = \Sigma F \times t$$

โดยแรงที่ไม่คงที่คูณกับเวลามีค่าคงที่เท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ F กับ t สำหรับแรงคงที่คูณกับเวลามีค่าเท่ากับผลคูณได้เลย

ตัวอย่างที่ 1 จากรูปวัตถุมวล 10 กิโลกรัม ถูกกระทำด้วยแรงที่ไม่คงที่ ตามสมการ $F = 2t + 8$ ให้เคลื่อนที่บนพื้นที่มีสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน 0.1 จาก A ไป B นาน 10 วินาที จงหา

ก. การคลของการเคลื่อนที่จาก A ไป B

ข. อัตราเร็วของวัตถุที่จุด B



วิธีทำ จากสมการ $F = 2t + 8$ เขียนเป็นกราฟจะได้กราฟเส้นตรงดังรูปขวามือ

ถ้า $t = 0$, $F = 8$; ถ้า $t = 10$; $F = 28$

หาแรงเสียดทาน จาก $f = \mu N$

แทนค่า $f = \mu mg = 0.1 \times 100 = 10$ นิวตัน

แสดงว่าวัตถุจะเคลื่อนที่ได้ต่อเมื่อแรงกระทำต่อวัตถุมีค่าน้อยเท่ากับ 10 นิวตัน

จากกราฟเมื่อ $t = 0$ แรง = 8 นิวตัน $< f$ แสดงว่าวัตถุยังไม่เคลื่อนที่

หาเวลาที่วัตถุเริ่มเคลื่อนที่ วัตถุจะเริ่มเคลื่อนที่เมื่อ $F = 10$ นิวตัน

จากสมการ

$$F = 2t + 8$$

เมื่อ $F = 10; t = ?$

แทนค่า $10 = 2t + 8$

$$t = 1$$

ดังนั้นวัตถุจะเริ่มเคลื่อนที่เมื่อ $t = 1$ วินาที แสดงว่าวัตถุใช้เวลาเคลื่อนที่นานเท่ากับ $10 - 1 = 9$ วินาที

จากการคล $= \Sigma F \times t = (F - f)t$

การคล $= F \times t - ft = \text{พื้นที่ใต้กราฟ } F, t - ft$

$$= \frac{1}{2} (10+28) \times 9 - 10 \times 9 = 9(19 - 10) = 81 \text{ นิวตัน.วินาที}$$

ดังนั้นการคล $= 81 \text{ นิวตัน.วินาที}$

หาอัตราเร็ววัตถุที่จุด B จาก $\Sigma \vec{F} \times t = m\vec{v} - m\vec{u}$

แทนค่า $81 = 10v - 0$

$$v = 8.1 \text{ เมตร/วินาที}$$

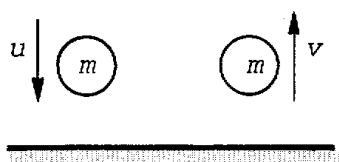
5.4 การคำนวณการคลจากการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม (ΔP)

การหาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมมีวิธีการหาได้ 2 แบบคือ

5.4.1 ถ้าความเร็วต้นและความเร็วปลายอยู่ในแนวเดียวกันมีขั้นตอนดังนี้

1. ให้หิยวัตถุออกมาเขียนแรงกระทำและความเร็ว
2. กำหนดทิศของ v เป็นบวก (+) เสมอแล้วคำนวณหาค่าที่ต้องการจากสมการ

$$\Sigma \vec{F} \times t = m\vec{v} - m\vec{u} \text{ หรือ } \Delta P = m\vec{v} - m\vec{u}$$



จากรูปมวล m ตกกระทบพื้นด้วยความเร็วต้น u และกระดอนขึ้นมาด้วยความเร็ว v ต้องการหา

ก. การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม

ข. แรงคลที่พื้นกระทำต่อมวล m

วิธีทำ

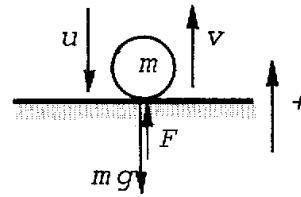
ก. หาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม ($\Delta \vec{P}$)

เขียนแรงและความเร็วที่วัตถุมวล m

$$\text{จาก } \Delta \vec{P} = m\vec{V} - m\vec{U}$$

$$\text{ดังนั้น } \Delta \vec{P} = mv - m(u)$$

$$\Delta \vec{P} = mv + mu$$



ข. หาแรงที่พื้นกระทำต่อมวล m

$$\text{จาก } \Sigma \vec{F} \times t = m\vec{V} - m\vec{U}$$

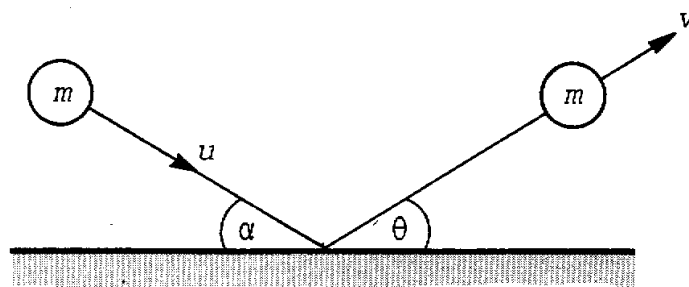
$$(F - mg)t = mv - m(-u)$$

$$F - mg = \frac{mv + mu}{t}$$

$$F = \frac{mv + mu}{t} + mg$$

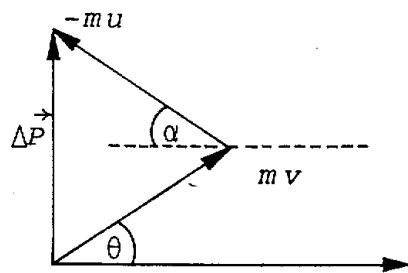
5.4.2 ถ้าความเร็วต้นและความเร็วปลายอยู่คนละแนว มีขั้นตอนการคำนวณดังนี้

1. หาขนาดและทิศทางของ $m\vec{V}$ และ $m\vec{U}$
2. วาดรูปตามสมการ $\Delta \vec{P} = m\vec{V} - m\vec{U}$ หรือ $\Sigma \vec{F} \times t = m\vec{V} - m\vec{U}$
3. คำนวณหาค่าที่ต้องการจากรูป



จากรูป วัตถุมวล m กระแทกพื้นด้วยความเร็วต้น u ทำมุม α กับพื้นและสะท้อนขึ้นด้วยความเร็ว v ทำมุม θ กับพื้น จงหาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม ΔP

วิธีทำ หาขนาดและทิศทางของ μ และ $m\mathbf{v}$

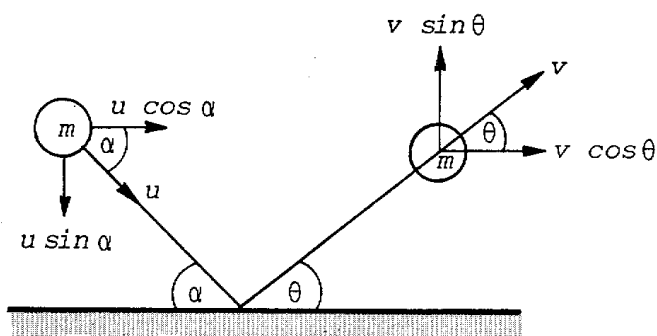


หาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมจากสมการ

$$\Delta \mathbf{P} = m\mathbf{v} - m\mathbf{u}$$

เขียนรูปตามสมการจะได้ดังรูปบน คำนวณหา $\Delta \mathbf{P}$ จากรูปได้

ข้อสังเกต กรณีที่ต้องการหาการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมในแกนใดแกนหนึ่ง ให้ใช้วิธีการแตก Vector จะสะดวกกว่า ดังรูปต้องการหาการเปลี่ยนโมเมนตัมในแกน X และแกน Y จะได้



จากรูป $\Delta P_x = mv \cos \theta - mu \cos \alpha$ ทิศ $\rightarrow$

$$\Delta P_y = mv \sin \theta - m(-u \sin \alpha)$$

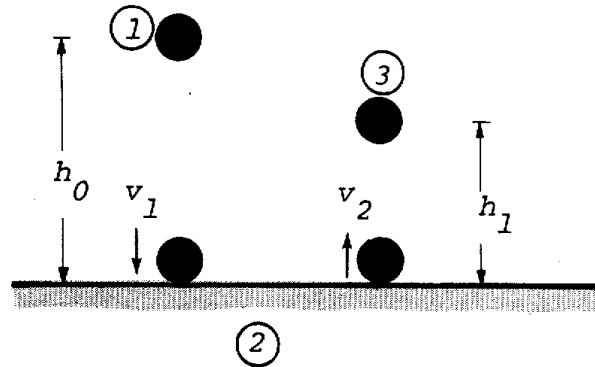
$$\Delta P_y = mv \sin \theta + mu \sin \alpha \text{ ทิศ } \uparrow$$

การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม

$$\Delta P = \sqrt{(\Delta P_x)^2 + (\Delta P_y)^2}$$

ตัวอย่างที่ 2 ลูกบอลมวล m กิโลกรัม ถูกปล่อยลงมาจากที่สูง h_0 เมตร เมื่อกระทบพื้นดินแล้วมันจะกระเด็นขึ้นไปถึง h_1 เมตร เวลาที่ลูกบอลสัมผัสพื้น เท่ากับ t วินาที จงหาแรงที่ลูกบอลได้รับจากพื้นในระหว่างกระทบพื้น

วิธีทำ สเกตรูปวัตถุ



มวลเคลื่อนที่จาก 1 ไปยัง 2 ไม่มีแรงภายนอกมากระทำจะได้

$$E_1 = E_2$$

แทนค่า

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{2gh_0}$$

มวล m เคลื่อนที่จาก 2 ไปยัง 3 ไม่มีแรงภายนอกมากระทำจะได้

$$E_2 = E_3$$

แทนค่า

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_1$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_1}$$

พิจารณาแรงที่มวล m ; จาก $\Sigma F \times t = m\vec{v} - m\vec{u}$ จะได้

$$(F - mg)t = mv_2 - m(-v_1)$$

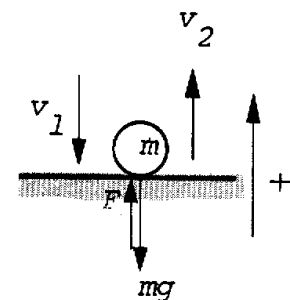
$$F - mg = \frac{mv_2 + mv_1}{t}$$

$$F = \frac{mv_2 + mv_1}{t} + mg$$

แทนค่า v_1, v_2 ;

$$F = \frac{m\sqrt{2gh_1} + m\sqrt{2gh_0}}{t} + mg$$

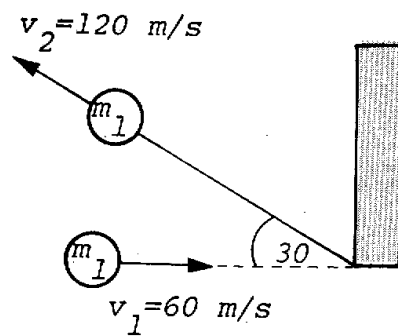
$$F = \frac{m\sqrt{2g}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_0})}{t} + mg$$



ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 บอลมวล m_1 วิ่งบนพื้นด้วยความเร็ว v_1 เมื่อถูกตีด้วยไม้แล้ววิ่งไปตามทิศตั้งฉากด้วยความเร็ว v_2 ถ้าเวลาที่ลูกบอลกระทบไม้ $= 0.3$ วินาที จงคำนวณหาแรงเฉลี่ยที่กระทำต่อลูกบอล

วิธีทำ



เนื่องจากความเร็ว v_1 และ v_2 อยู่คนละแนว ดังนั้นจึงต้องหาขนาด และทิศทางของ $m\vec{v}$ และ $m\vec{u}$ เสียก่อน

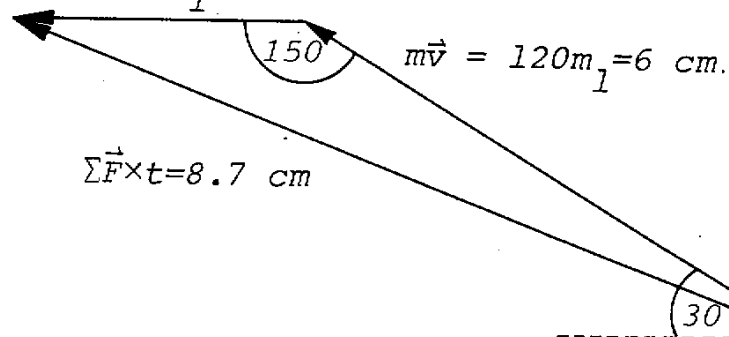
$$m\vec{u} = 60m_1 \quad \text{ทิศทาง } \rightarrow$$

$$m\vec{v} = 120m_1$$

$$\text{จาก } \Sigma \vec{F} \times t = m\vec{v} - m\vec{u}$$

วาดรูปตามสมการ กำหนดให้ 1 เซนติเมตร $= 20m_1$

$$-m\vec{u} = 60m_1 = 3 \text{ cm.}$$



$$\text{จากรูปวัด } \Sigma \vec{F} \times t = 8.7 \text{ เซนติเมตร}$$

$$= 8.7 \times 20m_1$$

$$F \times 0.03 = 174m_1$$

$$F = \frac{174m_1}{0.03}$$

$$= 580m_1 \quad \text{ตอบ}$$

หรือเราจะคำนวณหา $\Sigma \vec{F} \times t$ จากรูปก็ได้ ดังนี้

$$(\Sigma \vec{F} \times t)^2 = (60m_1)^2 + (120m_1)^2 - 2(60m_1)(120m_1)\cos 150^\circ$$

$$\begin{aligned}
 &= 3600m_1^2 + 1440m_1^2 - 14400m_1^2 (\cos 30^\circ) \\
 &= 18,000m_1^2 + 12.47m_1^2 = 30,470m_1^2 \\
 F \times t &= 174.55m_1 \\
 F &= \frac{174m_1}{0.03} \\
 &= 580 m_1 \quad \text{ตอบ}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 ปืนกลกระบอกหนึ่งยิงลูกปืนมวล 50 กรัม ออกด้วยอัตราเร็ว 1200 เมตร/วินาที ผู้ยิงถือปืนในมือ และทนแรงตึงกลับได้ 200 นิวตัน จงหาว่าเขาจะยิงได้เต็มที่กี่นัด/วินาที เขาจึงจะไม่ล้ม

วิธีทำ

ให้ยิงปืนได้นาทีละ n นัด

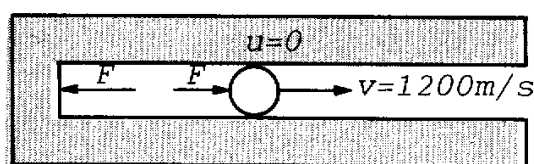
พิจารณาแรงที่กระสุนทั้งหมด n นัด

$$\text{จาก } \Sigma \vec{F} \times t = m\vec{v} - m\vec{u}$$

แทนค่า

$$200 \times 60 = (n \times 50 \times 10^{-3}) \times 1200 - 0$$

$$n = \frac{12,000}{1200 \times 50 \times 10^{-3}} = 200 \text{ นัด} \quad \text{ตอบ}$$



ตัวอย่างที่ 5 เด็กคนหนึ่งสวมสเกตยีนบนลานน้ำแข็ง ถ้ามวลของเด็กสวมสเกตเป็น 40 กิโลกรัม และเด็กปาลูกบอลมวล $\frac{1}{2}$ กิโลกรัม ออกไปตรงๆ ในแนวระดับด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที ถ้าเขาปาลูกบอลได้ครบ 16 ลูกใน 10 วินาที โดยต่อเนื่องกัน เขาจะได้รับแรงกระทำเฉื่อยเท่าใด

วิธีทำ

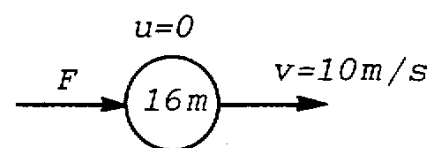
พิจารณาการคลที่เกิดขึ้นกับลูกบอล 16 ลูก ดังรูป

$$\text{จาก } \Sigma \vec{F} \times t = m\vec{v} - m\vec{u}$$

จากรูปแทนค่า

$$F \times 10 = (16 \times 1/2) \times 10 - 0$$

$$F = 8 \text{ นิวตัน}$$



ตอบ

5.5 กฎความถาวรของโมเมนตัม

ถ้าวัตถุเคลื่อนที่โดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อวัตถุ จะได้โมเมนตัมของวัตถุมีค่าคงที่ทั้งขนาดและทิศทาง

$$\text{จากสมการการเคลื่อนที่และโมเมนตัม} \quad \Sigma \vec{F} \times t = m\vec{V} - m\vec{U}$$

$$\text{ถ้าแรงภายนอก} \quad \Sigma \vec{F} \text{ มีค่าเป็นศูนย์ จะได้} \quad 0 = m\vec{V} - m\vec{U}$$

$$\text{หรือ} \quad m\vec{V} = m\vec{U}$$

นั่นคือ

โมเมนตัมของวัตถุ จะมีค่าคงที่

5.6 การชนกันของวัตถุ

การชนของวัตถุจะเกิดขึ้นได้อย่างน้อยจะต้องประกอบด้วยวัตถุ 2 ก้อน ถ้าการชนกันของวัตถุไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อการชน จะได้โมเมนตัมของระบบการชนกัน มีค่าคงที่ทั้งขนาดและทิศทาง ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\Sigma P \text{ ก่อนชน} = \Sigma P \text{ หลังชน}$$

ข้อสังเกต ในระบบการชนกันของวัตถุโดยส่วนใหญ่แล้วมักจะมีแรงภายนอกมากระทำต่อระบบทั้งนั้น ซึ่งแรงนั้นจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับลักษณะการชนกันของวัตถุ เราสามารถแยกการพิจารณาโมเมนตัมของระบบการชนกันออกเป็นแบบต่างๆ ได้ดังนี้

1. ในระบบการชนกันของวัตถุ ถ้าวัตถุตัวที่ถูกชนก่อนชนอยู่ในสภาพอยู่นิ่ง ภายหลังการชนอยู่ในสภาพเคลื่อนที่ แสดงว่าระบบการชนกันครั้งนี้โมเมนตัมของระบบมีค่าคงที่ทั้งก่อนและหลังการชนกัน เช่น การชนกันของรถยนต์ การชนกันของลูกบิลเลียด การปล่อยลูกเหล็กกระทบเสาเข็ม เป็นต้น เราถือว่าแรงเสียดทานที่ถนนกระทำต่อล้อรถ แรงเสียดทานที่พื้นโต๊ะกระทำต่อลูกบิลเลียด หรือแรงต้านของดินกระทำต่อเสาเข็มมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงผลจากการชนกัน จึงถือว่าแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบการชนกันเป็นศูนย์

2. สำหรับระบบการชนกันของวัตถุ ถ้าวัตถุที่ถูกชนอยู่ในสภาพนิ่งทั้งก่อนและหลังชน แสดงว่าระบบการชนกันนี้โมเมนตัมมีค่าไม่คงที่ เช่น ปล่อยลูกบอลกระทบพื้น ลูกบิลเลียดชนขอบโต๊ะ หรือปาวัตถุชนกำแพง เป็นต้น จะเห็นได้ว่า ขอบโต๊ะหรือกำแพง ภายหลังถูกชนก็ยังคงอยู่นิ่ง แสดงว่าแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบจะต้องมีค่ามากกว่าแรงผลจากการชนกัน โมเมนตัมของระบบการชนกันจึงไม่คงที่

การชนกันของวัตถุแยกการพิจารณาเป็น 3 แบบ

5.6.1 การชนกันของวัตถุแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์

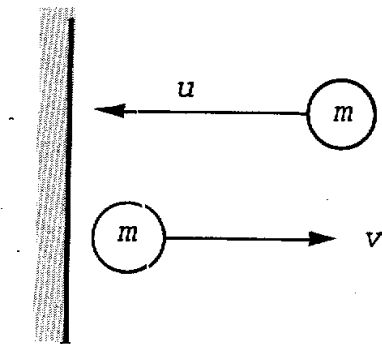
การชนกับแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ คือการชนกันของวัตถุที่ชนแล้ววัตถุไม่ติดกันไป และการชนกันในลักษณะนี้จะได้ผลรวมของพลังงานจลน์ก่อนชน เท่ากับผลรวมพลังงานจลน์หลังชน

$$\Sigma E_k \text{ ก่อนชน} = \Sigma E_k \text{ หลังชน}$$

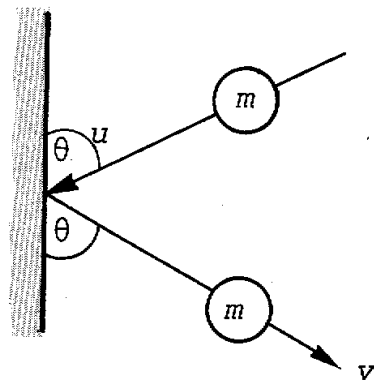
การคำนวณการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ แยกการพิจารณาได้เป็น 2 แบบ ดังนี้

1. การชนกันที่มีแรงภายนอกมากระทำต่อระบบการชนกัน จะได้สมการการคำนวณเพียงสมการเดียวคือ $\Sigma E_k \text{ ก่อนชน} = \Sigma E_k \text{ หลังชน}$

ให้นักเรียนพิจารณา การชนกันของวัตถุมวล m กับกำแพงโดยให้ความเร็วก่อนชนเท่ากับ u และความเร็วหลังชนเป็น v จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง u และ v ดังนี้ ถ้ากำหนดให้วัตถุวิ่งบนพื้นราบ



a) วัตถุชนตั้งฉากกับกำแพง



b) วัตถุชนทำมุม θ กับกำแพง

เนื่องจากการชนกันดังรูป (a) และ (b) เป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ จะได้

$$\Sigma E_k \text{ ก่อนชน} = \Sigma E_k \text{ หลังชน}$$

แทนค่า

$$\frac{1}{2}mu^2 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

ดังนั้น

$$u = v$$

นั่นคือ

$$\text{อัตราเร็วก่อนชน} = \text{อัตราเร็วหลังชน}$$

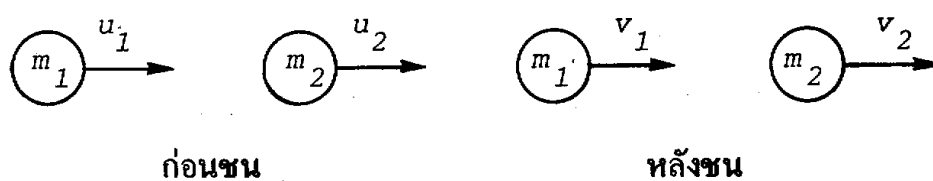
2. การชนกันไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อระบบการชนกัน จะได้สมการการคำนวณดังนี้

$$1. \Sigma P \text{ ก่อนชน} = \Sigma P \text{ หลังชน}$$

$$2. \Sigma E_k \text{ ก่อนชน} = \Sigma E_k \text{ หลังชน}$$

พิจารณาการชนกันของวัตถุ 2 ก้อน ที่มีความเร็วอยู่ในแนวจุด C.M.

ให้วัตถุมวล m_1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_1 ชนวัตถุอีกก้อนหนึ่ง มวล m_2 ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_2 ทำให้ความเร็วหลังชนเป็น v_1 และ v_2 ตามลำดับ



จาก $\Sigma P \text{ ก่อนชน} = \Sigma P \text{ หลังชน}$

แทนค่า $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$

$$m_1 u_1 - m_1 v_1 = m_2 v_2 - m_2 u_2$$

$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \dots\dots\dots (1)$$

จาก $\Sigma E_k \text{ ก่อนชน} = \Sigma E_k \text{ หลังชน}$

แทนค่า $\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2)$$

$$m_1(u_1 - v_1)(u_1 + v_1) = m_2(v_2 - u_2)(v_2 + u_2) \dots\dots\dots (2)$$

สมการที่ 2 / 1 จะได้

$$u_1 + v_1 = v_2 + u_2$$

สรุป เพื่อความสะดวกในการคำนวณการชนกันของวัตถุ 2 ก้อนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ในแนวเดียวกันเราจะใช้สมการการคำนวณดังนี้

1. สมการโมเมนตัม จะได้ $\Sigma P \text{ ก่อนชน} = \Sigma P \text{ หลังชน}$

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

2. สมการพลังงานจลน์ จะได้ $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$

โดย u_1 และ u_2 เป็นความเร็วก่อนชนของมวล m_1 และ m_2 ตามลำดับ

v_1 และ v_2 เป็นความเร็วหลังชนของมวล m_1 และ m_2 ตามลำดับ

ซึ่งเวกเตอร์ทุกตัวกำหนดให้มีทิศไปทางเดียวกันหมด ถ้าคำนวณได้เป็นลบ แสดงว่ามีทิศตรงข้ามกับที่สมมติ

ตัวอย่างที่ 5 มวล m วิ่งด้วยความเร็ว V เข้าชนกับมวล $5m$ ซึ่งหยุดอยู่กับที่ ถ้าในการชนไม่มีการเสียพลังงานจลน์และหลังจากชนกันแล้ว มวลทั้งสองต่างเคลื่อนที่ได้โดยอิสระ จงหาว่า

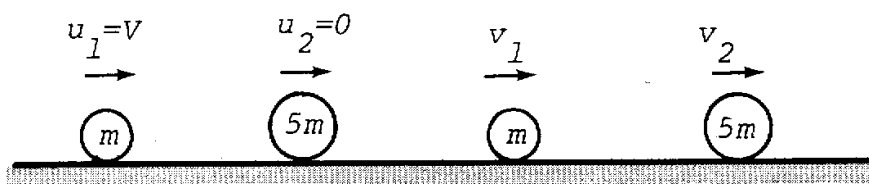
1. มวลที่ถูกชนจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเท่าไร
2. โมเมนตัมของมวลอันแรกเปลี่ยนไปเท่าไร

วิธีทำ เนื่องจากการชนกันไม่มีการสูญเสียพลังงานจลน์ จึงถือว่าเป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ จะได้สมการการคำนวณคือ

$$\Sigma P \text{ ก่อนชน} = \Sigma P \text{ หลังชน} \quad \dots\dots\dots(A)$$

$$\text{และ} \quad u_1 + v_1 = u_2 + v_2 \quad \dots\dots\dots(B)$$

สเกตรูปการชนกันทั้งก่อนชนและหลังชน



$$\text{แทนค่าในสมการ A จะได้} \quad mV + 0 = mv_1 + 5mv_2$$

$$\text{ดังนั้น} \quad V = v_1 + 5v_2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{แทนค่าในการ B จะได้} \quad V + v_1 = 0 + v_2$$

$$v_1 = v_2 - V \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{แทน (2) ใน (1)} \quad V = v_2 - V + 5v_2$$

$$2V = 6v_2$$

$$v_2 = \frac{V}{3}$$

$$\text{ดังนั้นมวลที่ถูกชนจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว} \quad \frac{V}{3} \quad \text{ตอบ}$$

แทนค่า v_2 ในสมการ (2) จะได้ $v_1 = \frac{V}{3} - v = \frac{-2V}{3}$

แสดงว่ามวล m ถอยหลังด้วยความเร็ว $v_1 = \frac{2V}{3}$

โมเมนตัมของ m ก่อนชน $P_1 = mu_1 = mV$ ทิศ $\rightarrow$

โมเมนตัมของ m หลังชน $P_2 = mv_1 = m\left(\frac{2V}{3}\right) = \frac{2mV}{3}$ ทิศ $\rightarrow$

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{2mV}{3} - (-mV) = \frac{5mV}{3}$$

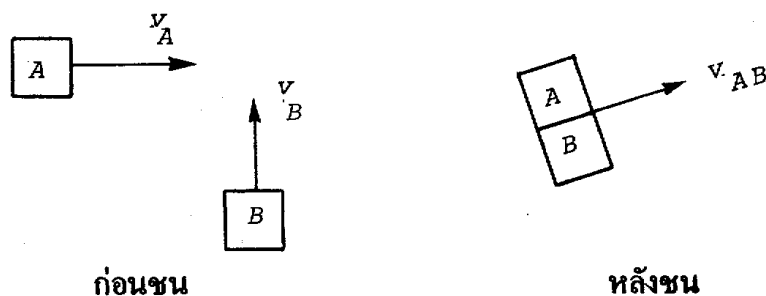
โมเมนตัมของมวลอันแรกเปลี่ยน $= \frac{5mV}{3}$ ตอบ

5.6.2 การชนกันของวัตถุแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์

การชนกันแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์ คือ การชนกันของวัตถุซึ่งชนแล้วติดกันไป การชนกันในลักษณะนี้พลังงานจลน์จะไม่คงที่ แต่โมเมนตัมยังคงที่อยู่ ดังนั้นจะได้

$$\Sigma P \text{ ก่อนชน} = \Sigma P \text{ หลังชน}$$

จากรูปวัตถุมวล m_A วิ่งชนมวล m_B แล้วเคลื่อนที่ติดกันไป จงหาทิศทางและความเร็วหลังชน



จากรูป จะได้ $m_A v_A = m_A v_A$ ทิศ $\rightarrow$

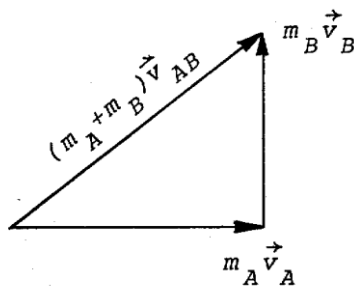
$m_B v_B = m_B v_B$ ทิศ $\uparrow$

จากสมการโมเมนตัม

$$\Sigma P \text{ ก่อนชน} = \Sigma P \text{ หลังชน}$$

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v_{AB}$$

จากสมการเขียนรูปได้ดังรูป



จากรูป จะได้

$$(m_A + m_B) v_{AB} = \sqrt{(m_A v_A)^2 + (m_B v_B)^2}$$

$$v_{AB} = \frac{\sqrt{(m_A v_A)^2 + (m_B v_B)^2}}{(m_A + m_B)}$$

5.6.3 การระเบิดของวัตถุ

นอกเหนือจากการชนกันของวัตถุทั้งสองชนิดแล้ว ยังมีอีกยี่ห้อลักษณะหนึ่ง ซึ่งมีรูปแบบการคำนวณเหมือนการชนกัน

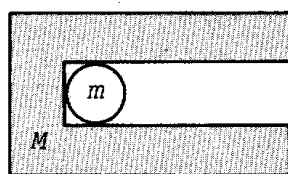
การชนกันของวัตถุอีกแบบหนึ่ง คือ การระเบิดของวัตถุซึ่งสภาพเดิมวัตถุจะอยู่ด้วยกันภายหลังจะมีการแยกออกจากกัน ดังนั้นจะได้เงื่อนไขของโมเมนตัมดังสมการ

$$\Sigma P \text{ ก่อนระเบิด} = \Sigma P \text{ หลังระเบิด}$$

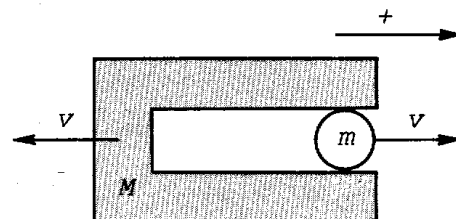
การคำนวณการระเบิดของวัตถุ แยกการพิจารณาออกได้เป็น 2 แบบคือ

1. การระเบิดแบบแยกอิสระจากกัน การระเบิดของวัตถุลักษณะนี้วัตถุจะแยกออกจากกันอย่างอิสระ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

การยิงปืน เดิมกระสุนและปืนอยู่ด้วยกัน เมื่อยิงกระสุนออกจากตัวปืน ตัวปืนจะถอยหลัง

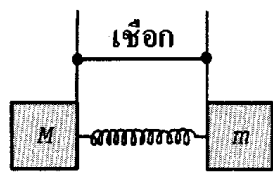


ก่อนระเบิด



หลังระเบิด

มวลอัดสปริง วัตถุมวล M และ m ผูกติดกันด้วยเชือกและมีสปริงคั่นอยู่ ตัดเชือกให้ขาด มวล M และ m จะกระเด็นออกจากกันด้วยความเร็ว V และ v ตามลำดับ

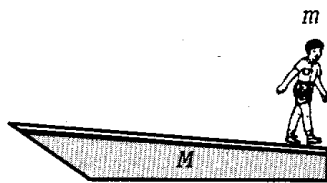


ก่อนระเบิด



หลังระเบิด

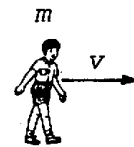
คนกระโดดเรือ เดิมคนและเรืออยู่ด้วยกัน เมื่อคนกระโดดจากเรือ เรือจะถอยหลัง



ก่อนระเบิด



หลังระเบิด



จากตัวอย่างข้างบน หาความสัมพันธ์ของโมเมนตัมได้จากสมการ

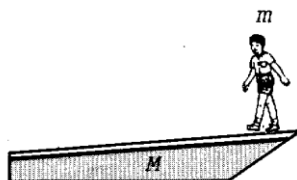
$$\Sigma P \text{ ก่อนระเบิด} = \Sigma P \text{ หลังระเบิด}$$

$$\text{แทนค่า} \quad 0 = M\vec{V} + m\vec{v}$$

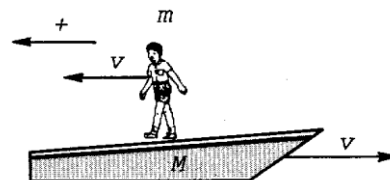
$$\text{จะได้} \quad MV = mv$$

2. การระเบิดสัมผัส ภายหลังการระเบิดแล้ววัตถุยังอยู่ด้วยกัน การคำนวณให้ถือว่าวัตถุแต่ละตัวมีความเร็วเทียบกับโลก แล้วจึงแทนค่าในสมการ $\Sigma P \text{ ก่อนระเบิด} = \Sigma P \text{ หลังระเบิด}$

คนเดินบนเรือ ให้เดิมคนมวล m อยู่บนเรือมวล M เมื่อคนเดินบนเรือด้วยความเร็ว v จะทำให้เรือขยับด้วยความเร็ว V ในทิศตรงข้าม

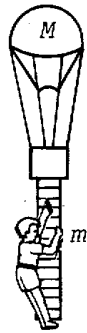


ก่อนระเบิด

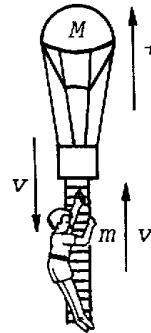


หลังระเบิด

คนไต่บอลลูก คนมวล m ห้อยอยู่ที่บันไดของบอลลูก ซึ่งมีมวล M คนไต่บอลลูกขึ้นด้วยความเร็ว v บอลลูกเคลื่อนที่ลงด้วยความเร็ว V



ก่อนระเบิด



หลังระเบิด

จากตัวอย่างข้างบน ความเร็วคนเทียบกับเรือหรือลูกบอลลูก ต่างเท่ากับ v ดังนั้นความเร็วคนเทียบกับโลก $= v - V$

หาความสัมพันธ์โมเมนตัมจาก

$$\Sigma P \text{ ก่อนระเบิด} = \Sigma P \text{ หลังระเบิด}$$

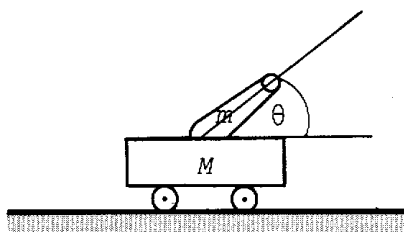
$$\begin{aligned} \text{แทนค่า} \quad 0 &= M\dot{V} + m\dot{v} \\ &= MV - m(v - V) \end{aligned}$$

$$\text{จะได้} \quad mv = (M+m)V$$

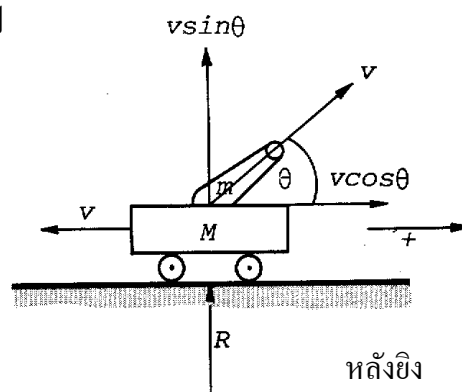
5.7 การชนกันของวัตถุที่มีโมเมนตัมคงที่บางแนว

จะได้โมเมนตัมของวัตถุคงที่ในแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุตัวที่ถูกชน หรือในแนวการเคลื่อนที่ของวัตถุตัวที่ถูกกระทำดังตัวอย่างต่อไปนี้

การยิงปืน กำหนดให้ยิงปืนออกจากกระบอกปืนที่ทำมุม θ กับแนวระดับด้วยความเร็ว v ทำให้ตัวปืนถอยหลังด้วยความเร็ว V ในแนวราบ ดังรูป



ก่อนยิง



หลังยิง

จากรูป เมื่อยิงปืนแล้วจะทำให้ปืนเคลื่อนที่ถอยหลังแนวราบ ดังนั้นโมเมนตัมจะมีค่าคงที่ในแนวราบเท่านั้น สำหรับโมเมนตัมแนวตั้งจะมีค่าไม่คงที่ เพราะมีแรง Reaction ของพื้นกระทำต่อตัวปืน

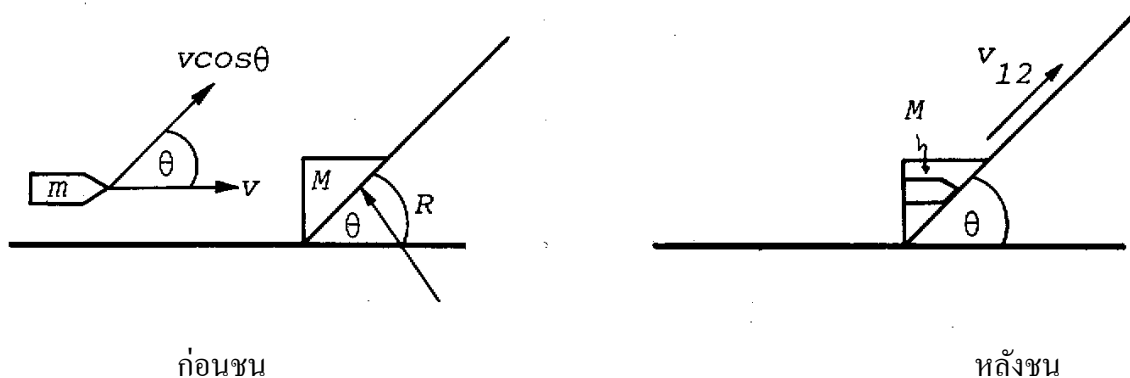
$$\text{จาก } (\Sigma P_{\text{แนวราบ}}) \text{ ก่อนยิง} = (\Sigma P_{\text{แนวราบ}}) \text{ หลังยิง}$$

$$\text{แทนค่า} \quad 0 = mV + MV$$

$$0 = mv \cos \theta - MV$$

$$\text{จะได้} \quad MV = mv \cos \theta$$

การยิงปืนชนวัตถุ ยิงกระสุนมวล m ให้ชนวัตถุมวล M ดังรูป แล้วกระสุนฝังในวัตถุมวล M ทำให้เคลื่อนขึ้นพื้นเอียงดังรูป ด้วยอัตราเร็ว v_{12}



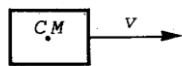
จากรูป เมื่อวัตถุมวล M ถูกกระสุนแล้วเคลื่อนที่ในแนวเอียง จะได้โมเมนตัมของวัตถุมีค่าคงที่ในแนวเอียงเท่านั้น สำหรับโมเมนตัมในแนวตั้งจากกับพื้นเอียงจะมีค่าไม่คงที่เพราะมีแรงปฏิกิริยาของพื้นกระทำต่อวัตถุ

$$\text{จาก } (\Sigma P_{\text{แนวเอียง}}) \text{ ก่อน} = (\Sigma P_{\text{แนวเอียง}}) \text{ หลัง}$$

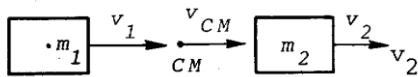
$$\text{แทนค่า} \quad mv \cos \theta = (M + m)V_{12}$$

5.8 การเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล

เมื่อวัตถุมีการเคลื่อนที่ จุด C.M. ของวัตถุก็จะเคลื่อนที่ไปด้วย สำหรับระบบที่ประกอบด้วยวัตถุหลายก้อนเกิดการเคลื่อนที่ จุด C.M ของระบบนั้นก็จะเคลื่อนที่ไปด้วย ดังรูป



จากรูป วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v จุด C.M. ของวัตถุก็จะมี
ความเร็ว $v_{C.M.} = v$ ด้วย



จากรูปมวล m_1 มีความเร็ว v_1 และมวล m_2 มีความเร็ว
 v_2 จุด C.M. ของระบบมีความเร็ว $v_{C.M.}$

เราสามารถหาความเร็วจุด C.M. ของระบบได้จาก

ผลรวมโมเมนตัมของมวลย่อย = โมเมนตัมทั้งระบบ

จากรูป จะได้ $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{C.M.}$

ดังนั้น

$$v_{C.M.} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

นั่นคือ
$$v_{C.M.} = \frac{\sum m v}{\sum m}$$

โดย $v_{C.M.}$ = ความเร็วจุด C.M. ของระบบ

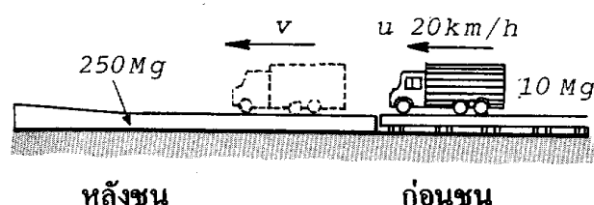
$\sum m v$ = ผลรวมโมเมนตัมของวัตถุในระบบ

$\sum m$ = ผลรวมของมวลวัตถุในระบบ

สำหรับระบบการชนกันของวัตถุที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ จะได้ผลรวมโมเมนตัมก่อนชน
เท่ากับผลรวมโมเมนตัมหลังชน ดังนั้นความเร็วจุด C.M. ทั้งก่อนและหลังชนจึงมีค่าเท่ากัน และหาได้จาก

สมการ
$$v_{C.M.} = \frac{\sum m v}{\sum m}$$

ตัวอย่างที่ 6 รถบรรทุกมวล 10 เมกะกรัม เคลื่อนที่จากท่าเรือด้วยความเร็ว 20 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ไปลง
บนไถ่หนึ่งมวล 250 เมกะกรัม ในน้ำนิ่ง และเบรกให้รถจอดนิ่งบนไถ่ จงหาอัตราเร็วของไถ่หลังจากจอด
นิ่งบนไถ่แล้วไม่คิดแรงเสียดทานของน้ำ



วิธีทำ หาความเร็วหลังชนจาก $\Sigma P \text{ ก่อน} = \Sigma P \text{ หลัง}$

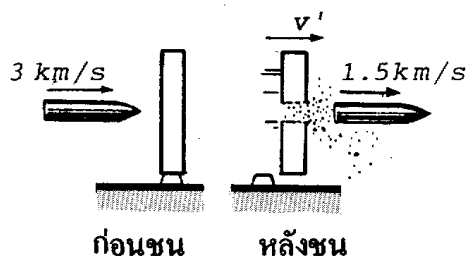
แทนค่า

$$Mu = (M + m)v$$

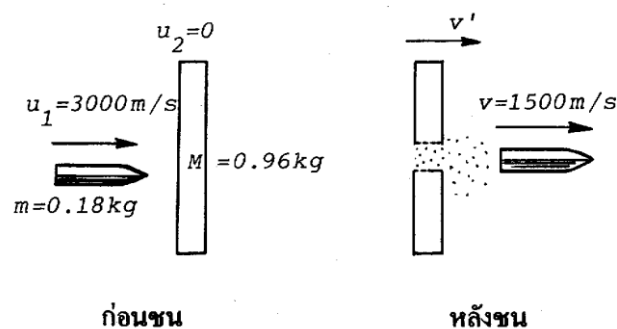
$$10 \times 20 = (250 + 10)v$$

$$v = \frac{200}{260} = 0.77 \text{ กิโลเมตร/ชั่วโมง} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 7 ลูกปืนลูกหนึ่งมวล 180 กรัม มีความเร็ว 3 กิโลเมตร/วินาที พุ่งเข้าชนตรงกลางจานมวล 0.96 กิโลกรัม ซึ่งอยู่นิ่งบนพื้นระดับราบลื่น ถ้าลูกปืนทะลุจานไปด้วยความเร็ว 1.5 กิโลเมตร/วินาที จงหาความเร็ว v' ของจานขณะลูกปืนหลุดจากจานพอดี



วิธีทำ



หา v' จาก

$$\Sigma P \text{ ก่อน} = \Sigma P \text{ หลัง}$$

แทนค่า

$$mu_1 + 0 = Mv' + mv$$

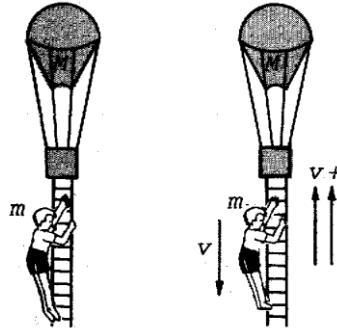
$$0.18 \times 3000 = 0.96v' + 0.18 \times 1500$$

$$540 = 0.96v' + 270$$

$$v' = \frac{270}{0.96} = 281 \text{ เมตร/วินาที} \quad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่าง 8 บอลลูนลูกหนึ่งมวล M กำลังลอยอยู่นิ่งๆ มีบันไดที่ทำด้วยเชือกห้อยลงมาและมีคนยืนอยู่บนบันได ถ้าคนมวล m เริ่มไต่บันไดขึ้นไปด้วยความเร็ว v สัมพัทธ์กับบันได จงหาความเร็วของบอลลูนสัมพัทธ์กับโลก

วิธีทำ



ให้คนไต่เชือกขึ้นด้วยความเร็ว v สัมพัทธ์กับบอลลูน ทำให้บอลลูนเคลื่อนที่ลงด้วยความเร็ว V ดังนั้น ความเร็วคนเทียบกับโลก $= v - V$

จาก $\sum P$ ก่อนระเบิด $= \sum P$ หลังระเบิด

แทนค่า $0 = m\dot{v} + M\dot{V}$

$$0 = m(v - V) + M(-V)$$

$$0 = m(v - V) - MV$$

$$0 = mv - mV - MV$$

$$0 = mv - V(m + M)$$

$$V = \frac{mv}{m + M}$$

ดังนั้นบอลลูนเคลื่อนที่ลงด้วยความเร็ว $= \frac{mv}{m + M}$ ตอบ